Atelier spécialité TES, TS : introduction au calcul matriciel

Exemples tirés du document ressources du nouveau programme 2012 de terminale

Introduction à la notation matricielle comme tableau de nombres

Situation problème 1 : De l'intérêt de créer une « rupture » permettant d'avoir accès à un nouvel outil plus performant.

On conserve dans une enceinte une population d'êtres unicellulaires qui ne peuvent se trouver que dans deux états physiologiques désignés par A et B. On désigne par a_n et b_n les effectifs – exprimés en milliers d'individus – des deux sous-populations (correspondant à chacun des deux états A et B) à l'instant n. Des observations menées sur une assez longue période permettent d'estimer que 95% des unicellulaires se trouvant à l'instant n dans l'état A n'ont pas changé d'état à l'instant $n+1$, non plus que 80% de ceux se trouvant à l'instant n dans l'état B ce qui se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,95a_n + 0,2b_n \\ b_{n+1} = 0,05a_n + 0,8b_n \end{cases} \quad (*)$$

L'effectif total s'élève à 500 000 individus.

Le travail ci-dessous peut être demandé comme travail à la maison.

- Soit on fait écrire un algorithme permettant de déterminer les populations au bout de1 seconde, 2 secondes, etc….. 25 secondes, 40 secondes etc….(en supposant que le temps est décompté en secondes entières)
- Soit on utilise un tableur pour visualiser les différentes populations quand le temps varie.
- Soit , on entre directement dans un « traitement » mathématique en introduisant les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $U_n = a_n + b_n$ et $V_n = b_n - 100$ et on montre que (V_n) est géométrique pour ensuite exprimer a_n et b_n en fonction de n et répondre ainsi à la question posée.

A ce stade, on peut introduire la notation matricielle, en écrivant :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.2 \\ 0.05 & 0.8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Et montrer que l'on a : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.2 \\ 0.05 & 0.8 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$

On utilise alors la calculatrice pour calculer les différentes populations au temps écoulé de la première partie et ainsi vérifier que l'on retombe sur les mêmes résultats.

Situation problème 2 : Produit de matrices, signification.

Pour une fête, ZOÉ est chargée d'acheter du jus d'orange (O), du jus de pomme (P) et des boissons gazeuses (G).
Elle va étudier diverses possibilités de coût en faisant varier prix et quantités. Le but est de rechercher les diverses dispositions de « multiplication » de tableaux qui n'aideront pas directement ZOÉ, mais le futur gestionnaire qui maniera un grand nombre de produits et un grand nombre de prix.

– **Premier cas**

Prix en euros par unité de O, de P, de G : $\boxed{2}\ \boxed{1{,}5}\ \boxed{0{,}7}$

Quantités achetées : $\boxed{8}\ \boxed{6}\ \boxed{10}$

1. Calculer le coût total en détaillant l'opération sur une ligne.
2. Recopier le schéma ci-dessous et remplir les cases du « produit » d'une ligne par une colonne :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}}_{\text{quantités achetées}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}}_{\text{prix par unité}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix}}_{\text{coût total 1}}$$

Rédiger une règle de « multiplication » d'une ligne à gauche par une colonne à droite.

– **Deuxième cas**

Quantités achetées : $\boxed{10}\ \boxed{8}\ \boxed{12}$

Les prix sont inchangés.

Recopier et remplir les cases du « produit » de façon à faire apparaître le nouveau coût total 2.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}}_{\text{quantités achetées}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}}_{\text{prix par unité}} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ coût total 1} \\ \leftarrow \text{ nouveau coût total 2} \end{array}$$

– **Troisième cas**

Nouveaux prix en euros par unités : $\boxed{1{,}8}\ \boxed{1{,}6}\ \boxed{0{,}68}$

1. Recopier et remplir les cases du « produit » de façon à faire apparaître les quatre coûts totaux possibles :

$$\begin{array}{l} \text{quantités 1} \rightarrow \\ \text{quantités 2} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \times \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{prix 1} & \text{prix 2} \end{array} \end{array} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

2. Donner la signification concrète des nombres inscrits dans chaque case de la matrice des coûts totaux possibles.
3. Rédiger une règle permettent de trouver les résultats dans le tableau final.
4. Recopier et remplir les cases du « produit » suivant :

$$\begin{array}{l} \text{prix 1} \rightarrow \\ \text{prix 2} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \times \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{quantités 1} & \text{quantités 2} \end{array} \end{array} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Donner la signification concrète des nombres inscrits dans chaque case de la matrice des coûts totaux possibles.

<u>Situation problème 3</u> : produit de matrices 3x3

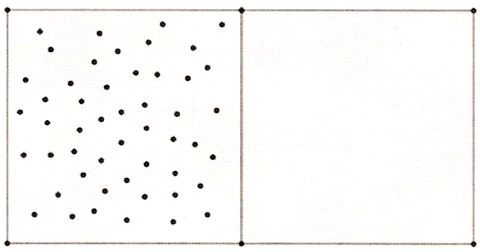
Le modèle d'urne de T et P Ehrenfest

1. <u>Présentation du problème</u>

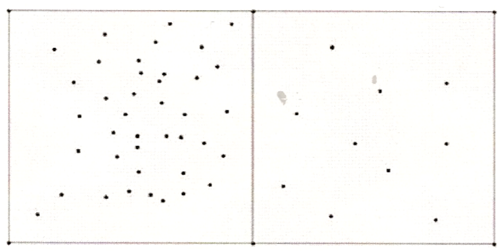
Ce modèle simplifié de diffusion d'un gaz à travers une membrane poreuse fut proposé en 1907 par les physiciens autrichiens Tatiana et Paul Ehrenfest pour décrire en termes de physique statistique les échanges de chaleur entre deux systèmes portés initialement à une température différente. Il permit ainsi de mieux comprendre le phénomène thermodynamique et de lever un paradoxe :

- d'un point de vue macroscopique, un système thermodynamique évolue naturellement et irréversiblement de façon que son entropie (quotient de la variation de chaleur par la température) soit maximum,
- mais d'un point de vue microscopique, on peut remarquer que les mouvements des particules sont réversibles.

Le but est de modéliser la répartition au cours du temps de N molécules de gaz à l'intérieur d'un récipient divisé en deux compartiments séparés par une membrane poreuse.



État initial



État à l'étape k

Description du modèle :

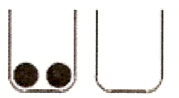
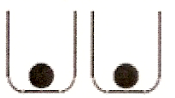
On modélise mathématiquement par l'expérience aléatoire suivante.

On considère 2 urnes A et B, et N boules numérotées de 1 a N.

Initialement, toutes les boules se trouvent dans l'urne A. Ensuite, aux étapes 1, 2, 3,… on tire au hasard, de façon équiprobable, un nombre entre 1 et N, et on change d'urne la boule correspondante.

2. <u>Étude du cas N = 2</u>

A chaque étape, la répartition dans les urnes A et B est l'une des trois suivantes :

 urne A urne B	 urne A urne B	 urne A urne B
Répartition r_1	Répartition r_2	Répartition r_3

Soit k un entier naturel non nul. On considère les évènements A_k, B_k et C_k

A_k : « à l'étape k, la répartition est r_1 »

B_k : « à l'étape k, la répartition est r_2 »

C_k : « à l'étape k, la répartition est r_3 »

Montrez que : $\begin{cases} \boldsymbol{P(A_{k+1})} = P_{A_k}(A_{k+1}) \times \boldsymbol{P(A_k)} + P_{B_k}(A_{k+1}) \times \boldsymbol{P(B_k)} + P_{C_k}(A_{k+1}) \times \boldsymbol{P(C_k)} \\ \boldsymbol{P(B_{k+1})} = P_{A_k}(B_{k+1}) \times \boldsymbol{P(A_k)} + P_{B_k}(B_{k+1}) \times \boldsymbol{P(B_k)} + P_{C_k}(B_{k+1}) \times \boldsymbol{P(C_k)} \\ \boldsymbol{P(C_{k+1})} = P_{A_k}(C_{k+1}) \times \boldsymbol{P(A_k)} + P_{B_k}(C_{k+1}) \times \boldsymbol{P(B_k)} + P_{C_k}(C_{k+1}) \times \boldsymbol{P(C_k)} \end{cases}$

En déduire que l'on peut écrire le système précédent sous forme matriciel

$$\begin{pmatrix} P(A_{k+1}) \\ P(B_{k+1}) \\ P(C_{k+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P(A_k) \\ P(B_k) \\ P(C_k) \end{pmatrix}$$

On pose $V_k = \begin{pmatrix} P(A_k) \\ P(B_k) \\ P(C_k) \end{pmatrix}$, et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Déterminez la répartition à la seconde étape, à la troisième étape.
b) Montrez que $V_k = P^k \times V_0$
c) $P^{2k} = P^2$ et $P^{2k+1} = P$
d) En déduire la répartition des boules au bout de k étapes.

Remarque 1 : La matrice P est appelé matrice de transition, on peut la retrouver simplement en utilisant un graphe, chacune des flèches reliant les trois types de répartition représentant une probabilité conditionnelle.

Ou encore

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} r_1 & r_2 & r_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque 2 : On retrouve ce type de schéma dans le problème d'une marche aléatoire sur un

segment. : A——————P—————— B

Si on est en A ou en B, on ne peut aller qu'en P. Si on est en P on peut aller soit en A soit en B.