Introduction des matrices en terminale S spécialité Maths (programme rentrée 2012)

Ces activités devraient permettre d'aborder en autonomie quelques notions proposées par les textes officiels. Par contre, elles ne les approfondissent pas assez. Il est aussi possible de présenter une partie de ces activités aux élèves de première S, afin de mieux définir (et motiver) le choix de leur future spécialité.

En bleu, vous trouverez des problèmes ouverts ou des énigmes avec une démarche d'investigation (il est possible de donner à préparer une semaine à l'avance ces exercices, quitte à demander, au minimum, une « narration de recherche »...).

En noir, des problèmes où l'élève est vraiment guidé. Ils devraient lui permettre d'avancer et de découvrir les nouvelles notions, en limitant les apports donnés par l'enseignant, même si cet élève éprouve régulièrement des difficultés dans notre matière.

En vert, les passages où l'utilisation d'un logiciel est demandée (tableur, algorithme, logiciel de calcul).

Et, en marron, un peu d'histoire des mathématiques (ou des sciences).

1. Les premiers pas vers les matrices.

I) Une énigme : on a trouvé ces exemples de calculs. Saurez-vous en déduire les résultats demandés ?

$$\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=14 \;;\; \begin{pmatrix}2 & 3\\5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\21\end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix}2 & 5\\3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}43\\54\end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix}4 & 3\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}39\\12\end{pmatrix} \;;$$

On en déduit : $\begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}=\ldots\ldots$ $\quad \begin{pmatrix}4 & 5\\3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\\ldots\ldots\end{pmatrix}$

Histoire des Mathématiques : La notion de matrice prend tout son sens à la publication par CAYLEY, en 1858, d'un article des *Philosophical Transactions* (Londres) : *A memoir on the Theory of Matrices.*
Voir histoire de la notion des matrices: ***http://www.math93.com/theoreme/matrices.html***

II) Introduction de la notation des matrices en passant par des tableaux :

Compléter chaque tableau: (les prix ne sont pas réalistes!)

Tableau 1	Prix du crayon	Prix de la gomme		J'achète :		Cela va coûter :
Magasin A	3 euros	2 euros		10 crayons et 20 gommes		….. au magasin A

Tableau 2	Prix du crayon	Prix de la gomme		J'achète :		Cela va coûter :
Magasin A	4 euros	2 euros		10 crayons et 20 gommes		…........…............................ au magasin A
Magasin B	5 euros	3 euros				…...........…......................... au magasin B

Tableau 3	Prix du crayon	Prix de la gomme		J'achète :		Cela va coûter :
Magasin A	8 euros	4 euros		7 crayons 6 gommes		…..........…........................... au magasin A
Magasin B	9 euros	2 euros				…..........….......................... au magasin B

Tableau 4	Prix du crayon	Prix de la gomme	J'achète :		Cela va coûter :
Magasin A	4	3	13	=	….................
Magasin B	5	4	5		….................

Compléter :

7	3	4	=	….......
8	4	5		….......

9	10	3	=	….......
7	8	4		….......

En mathématiques, ces tableaux peuvent s'écrire comme le produit d'une matrice carrée d'ordre 2 (ou plus!) et d'une matrice colonne :

$$\begin{pmatrix}2 & 5\\3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\\ldots\ldots\end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix}-1 & 2\\3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\\ldots\ldots\end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix}2 & 5\\3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\\ldots\ldots\end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix}1 & 2 & -5\\2 & 3 & 6\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\\ldots\ldots\\\ldots\ldots\end{pmatrix}$$

2. Mise en pratique des matrices avec une méthode de décodage à découvrir
(En 1929, Lester S. Hill a conçu, breveté et mis en vente cette méthode de codage, sans grand succès.)

Vous venez de recevoir un courriel. Il contient un message secret à décoder et une pièce jointe qui semble donner des explications pour utiliser sa «clé»... Travailler pour l'instant sans ordinateur, vous aurez la suite du message à décoder sur un tableur.
Début du message secret :

23 5 12 23 30 4 7 18 23 7

En pièce jointe sur le tableur :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
,	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[	\	]	^

$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ Utiliser la matrice A (qui est la matrice de « déchiffrement ») et les restes de la division par le nombre **31**.

---

3. Introduction du produit de deux matrices
Marche aléatoire de «deux pas» sur un graphe à deux sommets : une évolution de population

I) Énoncé I : une évolution de population

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires. A l'année zéro, un quart des habitants sont en X.

A) Lors de l'année 0 : 20% des habitants de Y partent habiter dans la ville X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5% des habitants de X partent habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.

a) Représenter la situation par un schéma.

b) Déterminer le nombre d'habitants de la ville X au bout d'un an.

c) Compléter ce tableau:

Avec des fréquences	De X à ?	De Y à ?	A l'année 0	Au bout d'un an:
De ? à X	Qui restent en X …..	Qui viennent de Y …..	……………… habitants dans la ville X et	……………… habitants dans la ville X
De ? à Y	Qui viennent de X ….	Qui restent en Y …..	……………… habitants dans la ville Y	……………… habitants dans la ville Y

Avec n un entier naturel, on note U_n la matrice colonne de deux lignes :
en première ligne : le nombre d'habitants dans la ville X au début de l'année n.
en deuxième ligne : le nombre d'habitants de la ville Y au début de l'année n.

On note A la matrice qui vérifie $AU_0=U_1$.

d) Écrire les matrices U_0, U_1 et A.

e) Quel pourcentage est représenté par le coefficient de la première ligne et de la première colonne de la matrice A?

f) Quel pourcentage est représenté par le coefficient de la deuxième ligne et de la première colonne de la matrice A?

<u>B) Lors de l'année 1</u>: 30% des habitants de Y partent habiter la ville X, et 8% des habitants de X partent habiter la ville Y.

a) Déterminer la matrice B telle que $\mathbf{BU_1 = U_2}$ et en déduire U_2 :

b) En déduire le nombre d'habitants de la ville X et de la ville Y à l'année 2 ;

c) Quel pourcentage est représenté par le coefficient de la première ligne et de la première colonne de la matrice B?

d) Montrer que $B(AU_0)=U_2$.

C) On note C la matrice qui vérifie $CU_0=U_2$.

a) Quel pourcentage est représenté par le coefficient de la première ligne et de la première colonne de la matrice C? Calculer ce pourcentage.

b) i) Déterminer le pourcentage des habitants de la ville Y de l'année 0 qui ont vécu l'année 1 dans la ville de X et qui y sont restés à l'année 2.

ii) Déterminer le pourcentage des habitants qui habitaient Y aux années 1 et 0 avant de vivre dans la ville de X à l'année 2.

iii) Que représente la somme de ces deux pourcentages?

iv) En déduire un des quatre coefficients de la matrice C.

c) Calculer les autres coefficients de la matrice C en expliquant votre démarche. Puis écrire C.

d) Déterminer une technique pour calculer la matrice C en fonction des coefficients des matrices A et B.

Pour vous aider :

<u>De l'année 1 à 2</u>	De X à ?	De Y à ?
De ? à X	De X à X …..	De Y à X …..
De ? à Y	De X à Y ….	De Y à Y …..

<u>De l'année 0 à 1</u>	De X à ?	De Y à ?
De ? à X	De X à X …..	De Y à X …..
De ? à Y	De X à Y ….	De Y à Y …..

=

<u>De l'année 0 à 2</u>	De X à ?	De Y à ?
De ? à X	De X à X …..	De Y à X …..
De ? à Y	De X à Y ….	De Y à Y …..

<u>A savoir</u> : On dit que C est le produit de la matrice B et de la matrice A, on écrit C = BA.

e) On suppose maintenant que le million d'habitants est également réparti entre les villes X et Y à l'année 0. Déterminer le nombre de personnes qui vivraient alors dans la ville X à l'année 2.

f) A-t-on BA = AB ?

<u>II) Énoncé II : 25 ans plus tard...</u>

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires. A l'année zéro, un quart des habitants sont en X. Chaque année, 27% des habitants de Y partent habiter dans la ville X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 13% des habitants de X partent habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.
Déterminer le nombre d'habitants de la ville X à la 25^e année. (utiliser un logiciel de calcul)

4. Les systèmes et les matrices

I) Du système aux matrices :

a) Une punition vient d'être donnée à votre petit frère qui est en troisième. Son professeur lui a dit qu'il pouvait vous demander de lui simplifier le travail (calculatrice interdite!).

Punition : Donner la solution de chacun de ces systèmes		
$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$
$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 4 \end{cases}$
$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = -4 \\ x - y = 5 \end{cases}$

b) Comme vous venez de donner toutes les solutions «de tête» à votre frère, par curiosité, il vous pose une question...
Résoudre ce système (en fonction de a et b, des nombres réels fixés) :

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

c) Avec des matrices :

i) Avec X = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, déterminer M la matrice carrée d'ordre 2 pour que MX=B soit équivalent au système de b).

ii) Déterminer N la matrice carrée d'ordre 2 qui permet de connaître la solution (en colonne) de la question b) en faisant le produit NB.

iii) Faire le produit à gauche par N de chaque membre de MX=B. Que remarquez-vous?

II) Des matrices au système :

a) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{pmatrix}$

h) En utilisant les résultats précédents, compléter :
$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 3{,}5 & -4 \\ -2{,}5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 3{,}5 & -4 \\ -2{,}5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 3{,}5 & -4 \\ -2{,}5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 33 \\ -38 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$

l) Résoudre $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 33 \\ -38 \end{pmatrix}$ revient à résoudre le système :

m) Compléter en expliquant votre démarche :

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 33 \\ -38 \end{pmatrix}$$

5. Modèle de diffusion d' EHRENFEST

I) Un problème avec un algorithme :

Votre professeur de Mathématiques est en congé de maternité (environ quatre mois). Son remplaçant (peu scrupuleux) va vous noter d'une façon peu recommandable! Il décide de commencer par mettre 20 à tous les élèves de votre classe. Puis, chaque jour, il choisit au hasard un élève de votre classe pour modifier sa note : s'il a 20, il la remplace par 0; et s'il a 0, il la transforme à nouveau en 20. Au bout de 120 jours, ce « professeur » écrit sur le bulletin la dernière note qu'il a attribuée à chaque élève. La moyenne de la classe conviendra-t-elle à votre Proviseur? (Répondre intuitivement, programmer des simulations, et faire le lien avec le modèle d'Ehrenfest)

II) SIMULATION DE L'URNE D'EHRENFEST

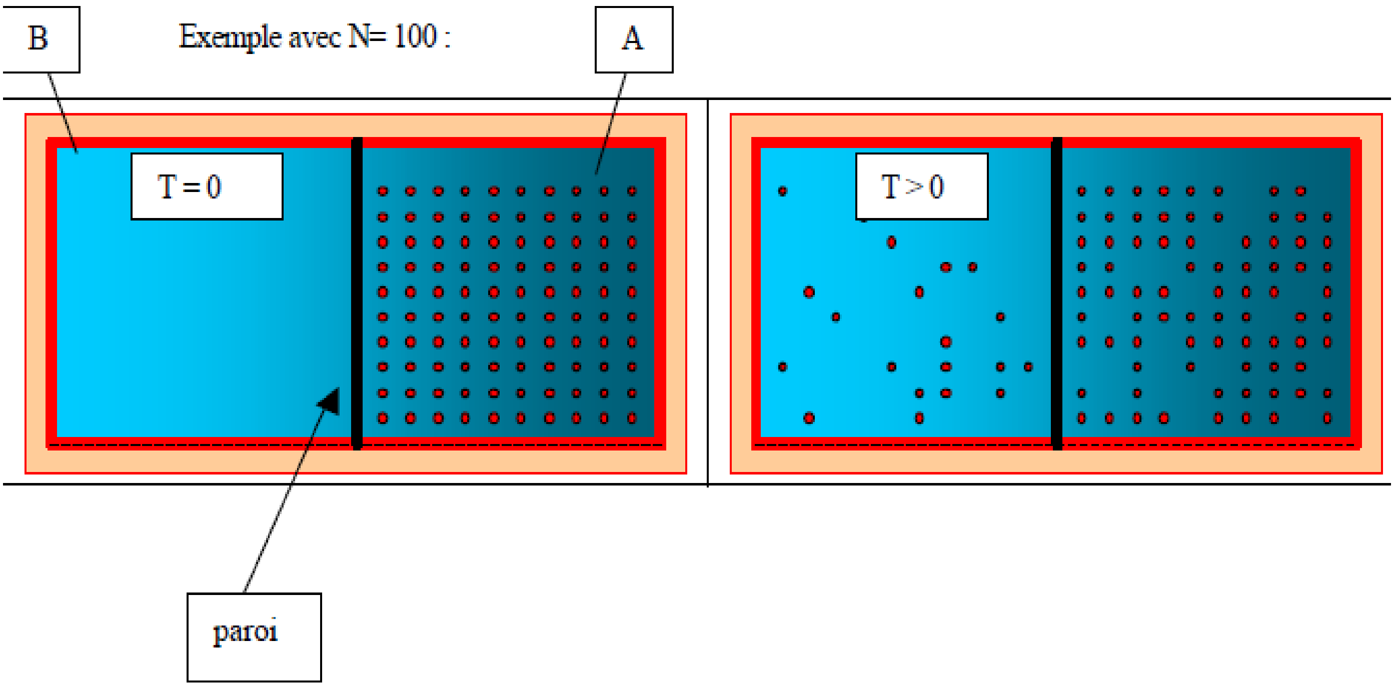
Son apport à l'appropriation des concepts d'équilibre statistique, d'irréversibilité, d'entropie, de flèche du temps.

(La première partie A) est tiré d'un article du même nom de Alain Marie-Jeanne, Frédéric Beau, Michel Janvier)

A) Le modèle d'Ehrenfest

a) Description du modèle

C'est un modèle de diffusion d'un gaz à travers une paroi proposé par les physiciens Ehrenfest (Mr et Mme) au début du siècle dernier : Une boite séparée en 2 compartiments A et B contient au total N particules. A chaque top d'une horloge, une particule et une seule, *choisie au hasard parmi les N*, change de compartiment. A l'instant initial toutes les particules sont en A.



Dans ce modèle il est important de remarquer plusieurs points :
- la probabilité pour une particule donnée de passer de A à B, ou de B à A est la même, égale à 1/N .
- Cette probabilité ne dépend pas du temps.
- Le comportement d'une particule est indépendant de celui des autres particules.

b) Objectif du modèle:

Le modèle précédent ne permet évidemment pas d'obtenir des résultats quantitatifs sur la diffusion à travers une paroi. Pour les physiciens Ehrenfest l'un des objectifs était de lever le «paradoxe » de l'irréversibilité. Nous allons expliquer ce paradoxe. L'irréversibilité est une évidence à notre échelle : la plupart des phénomènes macroscopiques ont une orientation dans le temps bien définie. Les assiettes se cassent mais malheureusement on n'a jamais vu des morceaux d'assiettes se ressouder spontanément pour reformer une assiette entière. Quasiment tous les phénomènes physiques, chimiques où biologiques sont à sens unique. Le second principe de la thermodynamique décrit cette irréversibilité : un système isolé évolue vers son maximum d'entropie et l'entropie ne diminue jamais (on doit ce principe à Clausius).

Les physiciens Ehrenfest voulaient donc montrer comment, à partir de particules aux évolutions réversibles, on pouvait obtenir, en combinant ces évolutions, une situation macroscopique irréversible.
Dans le modèle d'Ehrenfest, chaque particule a un comportement totalement réversible et la situation macroscopique est la superposition d'un grand nombre de particules identiques. Il s'agissait donc pour le couple Ehrenfest de prouver qu'il n'y avait pas besoin de modifier les lois de la physique des particules pour décrire l'irréversibilité du monde.

Cette notion d'irréversibilité et celle d'augmentation de l'entropie pour un système isolé conduisent aux problèmes plus généraux de l'évolution de l'univers (qui prit dans son ensemble est un système isolé) et du sens de l'écoulement du temps vers le maximum de désordre (i.e. la flèche du temps).

B) Situation avec N = 2 particules :

a) Déterminer les trois états possibles.
b) Établir le graphe dont les sommets sont ces états.
c) Établir les premières branches de l'arbre de probabilité.
c) Écrire P la matrice de transition. Puis déterminer les puissances de P.
d) Programmer une simulation avec 100 passages.

6. Marche aléatoire

I) Une petite marche sur trois pas :

Un individu est à la porte d'un bar... Il a une chance sur deux d'avancer ou de reculer. Ensuite, dès qu'il quitte ou rentre dans le bar d'un pas, il revient à la porte du bar! Et il recommence ainsi de suite à tituber...

a) Établir le graphe dont les sommets sont les trois lieux où peut être cet individu.
b) Établir les premières branches de l'arbre de probabilité.
c) Écrire P la matrice de transition. Puis déterminer les puissances de P.
d) Programmer une simulation avec 100 pas.
e) Faire le lien avec le modèle de diffusion d'Ehrenfest.