Ressources pour la classe terminale
générale et technologique

QUELQUES PASSAGES DE LA PREMIERE PARTIE

- Le modèle d'urnes de T. & P. Ehrenfest , dans le cas de $N = 2$

Mathématiques
Série S

Enseignement de spécialité

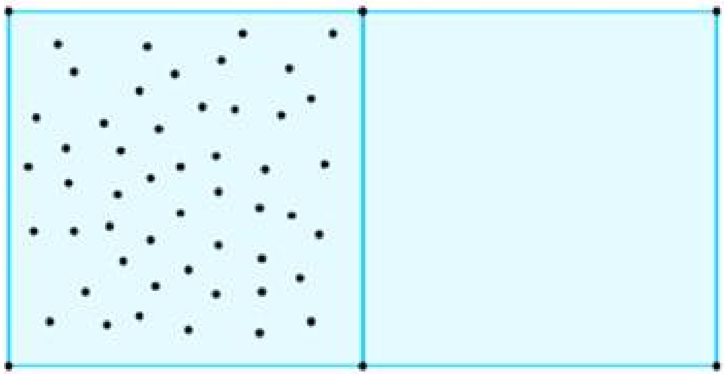
C. Le modèle d'urnes de T. & P. Ehrenfest

1. Présentation du problème

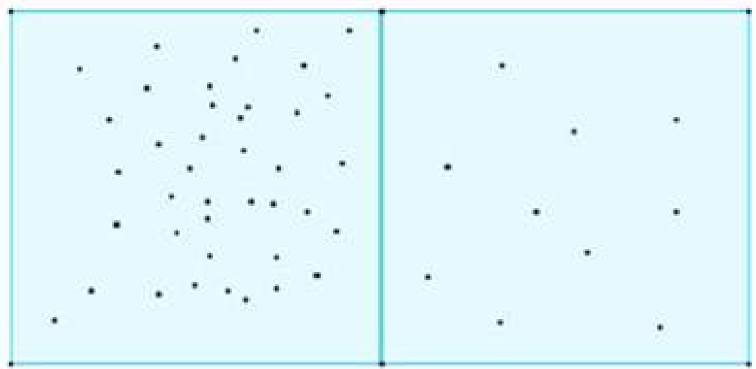
Ce modèle simplifié de diffusion d'un gaz à travers une membrane poreuse fut proposé en 1907 par les physiciens autrichiens Tatiana et Paul Ehrenfest pour décrire en termes de physique statistique les échanges de chaleur entre deux systèmes portés initialement à une température différente. Il permit ainsi de mieux comprendre le phénomène thermodynamique et de lever un paradoxe :

- d'un point de vue macroscopique, un système thermodynamique évolue naturellement et irréversiblement de façon que son entropie (quotient de la variation de chaleur par la température) soit maximum,
- mais d'un point de vue microscopique, on peut remarquer que les mouvements des particules sont réversibles.

Le but est de modéliser la répartition au cours du temps de N molécules de gaz à l'intérieur d'un récipient divisé en deux compartiments séparés par une membrane poreuse.



État initial



État à l'étape k

Description du modèle :

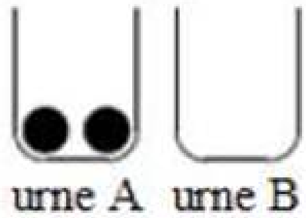
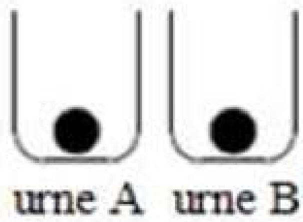
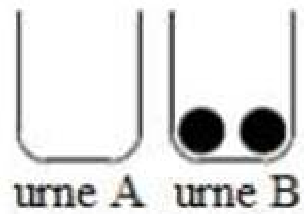
On modélise mathématiquement par l'expérience aléatoire suivante.

On considère 2 urnes A et B, et N boules numérotées de 1 a N.

Initialement, toutes les boules se trouvent dans l'urne A. Ensuite, aux étapes 1, 2, 3,… on tire au hasard, de façon équiprobable, un nombre entre 1 et N, et on change d'urne la boule correspondante.

2. <u>Étude du cas N = 2</u>

A chaque étape, la répartition dans les urnes A et B est l'une des trois suivantes :

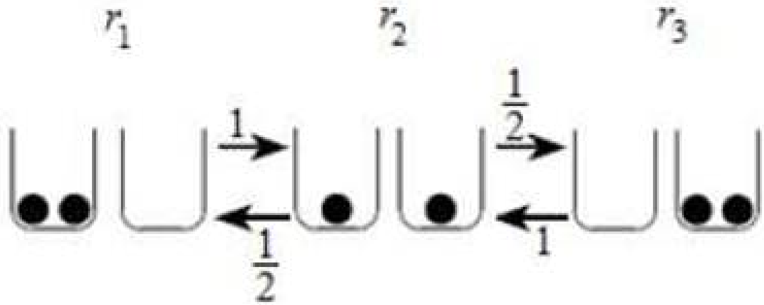
		
Répartition r_1	Répartition r_2	Répartition r_3

a) Introduction d'une matrice

Notons : R_1 l'événement « la répartition est r_1 » ;

R_2 l'événement « la répartition est r_2 » ;

R_3 l'événement « la répartition est r_3 ».



En notant, pour tout i et j de $\{1, 2, 3\}$; $p_{ij} = p_{R_i}\left(R_j\right)$, on a alors :

$p_{12} = 1$, $p_{21} = \dfrac{1}{2}$, $p_{23} = \dfrac{1}{2}$, $p_{32} = 1$ et $p_{11} = p_{22} = p_{33} = p_{13} = p_{31} = 0$

Ces données peuvent être stockées sous la forme d'un tableau (matrice carrée de format (3,3)) :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On établit par récurrence que :

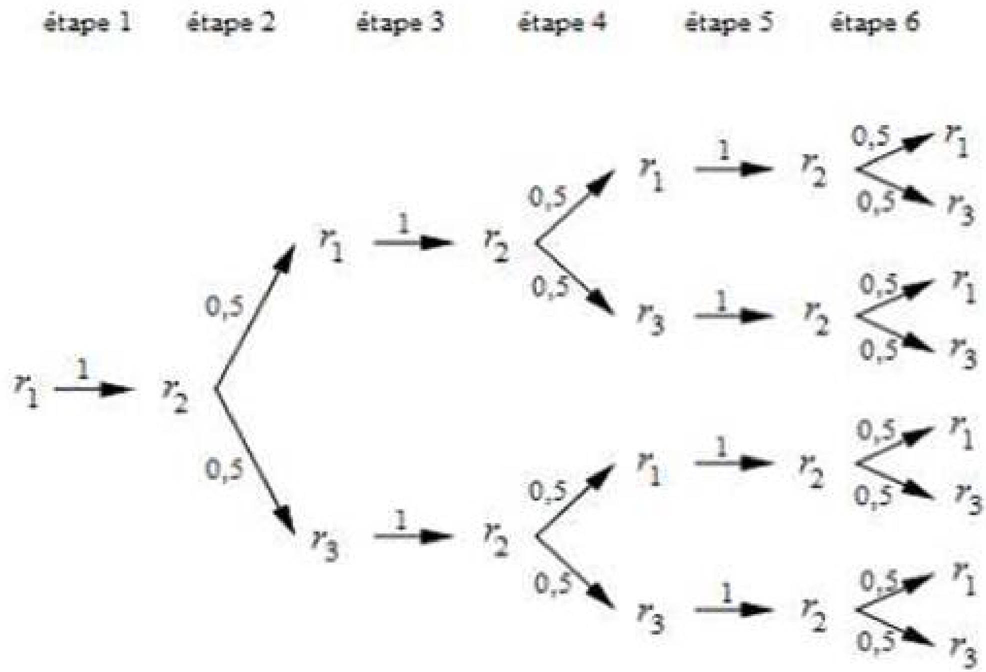
- pour tout entier naturel k non nul : $V_k = V_0 P^k$
- $P^{2k} = P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et que $P^{2k+1} = P$ pour tout entier $k \geq 1$.

On en déduit facilement que :

- pour tout entier k impair, $V_k = (0 \quad 1 \quad 0)$, ce qui correspond au fait qu'à tout instant impair, la répartition est toujours r_2
- pour tout entier k pair, non nul, $V_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, ce qui correspond au fait qu'à tout instant pair, la répartition est soit r_1 soit r_3.

Le calcul de l'espérance de X_k conduit à $E(X_k) = 1$, pour tout entier naturel k, ce qui signifie qu'au bout de k étapes, le nombre moyen de boules dans l'urne B est égal à 1. La répartition des boules dans les deux urnes a tendance à s'équilibrer.

b) Utilisation d'un arbre



A la $k^{\text{ième}}$ étape, on obtient les arbres suivants :

Si k est impair	Si k est pair
$r_1 \xrightarrow{1} r_2$ $r_3 \xrightarrow{1} r_2$	$r_2 \xrightarrow{0,5} r_1$ $r_2 \xrightarrow{0,5} r_3$

Remarque :

Le recours au calcul matriciel n'est vraiment utile que pour un grand nombre de particules mais le cas où $N = 2$ permet d'appréhender le problème en expliquant l'utilisation des matrices et en comparant les résultats obtenus avec ceux que l'on obtient avec l'utilisation d'un arbre.

c) Calcul du temps de retour moyen dans le cas $N = 2$

Considérons un processus de diffusion correspondant à $2n$ étapes et notons T_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'étapes pour revenir à l'état initial.

D'après l'étude précédente, on a :

$p(T_n = 1) = 0, p(T_n = 3) = 0$ et, pour tout entier naturel k, $p(T_n = 2k+1) = 0$;

$p(T_n = 2) = \frac{1}{2}, p(T_n = 4) = \frac{1}{4}$ et, pour tout entier naturel k non nul, $p(T_n = 2k) = \frac{1}{2^k}$.

Calculons l'espérance de T_n :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{2n} k\, p(T_n = k) = \sum_{k=1}^{n} 2k\, p(T_n = 2k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}}$$

Calculons cette somme de deux façons différentes.

- Première méthode

On calcule successivement les sommes géométriques :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}, \ldots, \sum_{k=n-1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \text{ et } \sum_{k=n}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

En ajoutant ces sommes, on obtient :

$$E(T_n) = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$$

- Deuxième méthode

On considère la fonction définie sur **R** par $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{2^k}$. On peut également écrire :

$$f(x)=\frac{\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}-1}{\frac{x}{2}-1}-1 \text{ si } x\neq 2 \text{ et } f(2)=n.$$

Pour $x\neq 2$, les deux expressions de $f(x)$ permettent d'exprimer $f'(x)$ de deux façons différentes. On obtient alors deux expressions de $f'(1)$, ce qui permet de calculer $E(T_n)$.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} E(T_n)=4$. On revient donc en moyenne à l'état initial au bout de 4 étapes.

<u>Remarque :</u>

Il est intéressant de constater que si $N=2$, le processus est réversible.

Cette étude est reprise et complétée dans la partie III.