Ressources pour la classe terminale générale et technologique

QUELQUES PASSAGES DE LA PREMIERE PARTIE

Mathématiques
Série S

Enseignement de spécialité

Introduction

Un enseignement qui prend appui sur la résolution de problèmes

Le programme de l'enseignement de spécialité de la terminale scientifique réintroduit l'algèbre linéaire au lycée. Mais l'algèbre linéaire du lycée des années 1980 s'appuyait sur les vecteurs du plan et de l'espace, et l'introduction des espaces vectoriels. L'entrée proposée aujourd'hui est matricielle : il s'agit de faire jouer un rôle à des tableaux de nombres, lorsqu'ils sont particulièrement adaptés à l'écriture et à la résolution de certains problèmes.

La première partie du présent document présente donc des problèmes où l'introduction des matrices vient « naturellement » et apparaît comme une simplification d'écriture et de lecture. Le vocabulaire nouveau est introduit en situation. Les définitions et les théorèmes auxquels il est nécessaire de faire référence ne sont pas sortis du contexte du problème, au moins dans un premier temps.

I. Quelques problèmes faisant apparaître des matrices

Dans cette partie, le vocabulaire spécifique aux matrices et les opérations sur les matrices ne sont pas supposés connus. Lorsque la nécessité s'en fait sentir, des matrices sont introduites, sur lesquelles on peut faire des opérations (le produit de Cayley notamment, couramment utilisé sous le simple nom de produit, et qui est celui proposé par la calculatrice scientifique).

A. Un problème à deux compartiments

1. Le problème

On conserve dans une enceinte une population d'êtres unicellulaires qui ne peuvent se trouver que dans deux états physiologiques désignés par A et B. On désigne par a_n et b_n les effectifs – exprimés en milliers d'individus − des deux sous-populations (correspondant à chacun des deux états A et B) à l'instant n. Des observations menées sur une assez longue période permettent d'estimer que 95% des unicellulaires se trouvant à l'instant n dans l'état A n'ont pas changé d'état à l'instant $n + 1$, non plus que 80% de ceux se trouvant à l'instant n dans l'état B ce qui se traduit par le système suivant :

$$\boxed{\begin{cases} a_{n+1} = 0,95a_n + 0,2b_n \\ b_{n+1} = 0,05a_n + 0,8b_n \end{cases} \qquad (*)}$$

L'effectif total s'élève à 500 000 individus.

1 La population à l'instant 0 satisfait $a_0 = 375$. Faire le calcul des effectifs a_n et b_n pour $n \leq 50$. Peut-on faire une conjecture sur le comportement des suites (a_n) et (b_n) ?
Effectuer de nouveaux essais en prenant d'autres valeurs initiales (mais un effectif total identique).

2 Quel est le comportement de la suite de terme général $\alpha_n = a_n - 400$? Conclure.

2. Commentaires sur le problème

Ce problème a été proposé dans le cadre d'une épreuve pratique de mathématiques.

Les élèves utilisaient un tableur pour conjecturer la nature des suites (a_n) et (b_n). À l'étape 36, si on fait abstraction des erreurs de calcul dues au logiciel, le système est stable : il y a 400 000 êtres dans l'état A et 100 000 dans l'état B.

Pour répondre à la question suivante, il suffit de faire entrer dans les calculs le fait que la population totale est conservée, autrement dit que, pour tout n : $a_n + b_n = 500$.

Le système $\begin{cases} a_{n+1} = 0,95a_n + 0,2b_n \\ b_{n+1} = 0,05a_n + 0,8b_n \end{cases}$ a les mêmes solutions que le système $\begin{cases} a_{n+1} = 0,75a_n + 100 \\ b_n = 500 - a_n \end{cases}$, dont les solutions (ce sont des couples de suites) s'obtiennent explicitement en faisant apparaître la suite (géométrique) de terme général $\alpha_n = 400 - a_n$.

n	*a* indice *n*	*b* indice *n*
0	375	125
1	381,25	118,75
2	385,9375	114,0625
3	389,453125	110,546875
4	392,0898438	107,9101563
5	394,0673828	105,9326172
6	395,5505371	104,4494629
7	396,6629028	103,3370972
8	397,4971771	102,5028229
9	398,1228828	101,8771172
10	398,5921621	101,4078379
11	398,9441216	101,0558784
12	399,2080912	100,7919088
13	399,4060684	100,5939316
14	399,5545513	100,4454487
...	...	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...
31	399,9966516	100,0033484
32	399,9974887	100,0025113
33	399,9981165	100,0018835
34	399,9985874	100,0014126
35	399,9989405	100,0010595
36	399,9992054	100,0007946

Le système se stabilise

POUR INTRODUIRE LES NOTATIONS :
DU PRODUIT D'UNE MATRICE ET D'UNE MATRICE COLONNE,
PUIS D'UNE MATRICE A LA PUISSANCE N

3. D'autres façons d'écrire le problème

On peut schématiser le système de relations $(*)$ par : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, donnant ainsi une signification au symbole $\times$ utilisé ici pour représenter l'action d'un tableau carré (une *matrice carrée d'ordre 2*) sur un couple de réels écrits en colonne (une *matrice-colonne*).

Le produit des matrices utilisable sur la calculatrice fonctionne ainsi et on pourrait écrire que, pour tout entier naturel n non nul $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$.

Cette *puissance n-ième* de matrice peut-elle s'exprimer explicitement ?

Cette question n'est pas abordée ici. Notons que des simplifications sont certainement envisageables comme le laissent penser les résultats obtenus sur la suite (α_n). En effet, si on pose $\beta_n = b_n - 100$, on obtient le système : $\begin{cases} \alpha_n = 0,75^n \alpha_0 \\ \beta_n = 0,75^n \beta_0 \end{cases}$.

On en déduit que : $\boxed{\begin{cases} a_n = 400 - 0,75^n \times 25 \\ b_n = 100 + 0,75^n \times 25 \end{cases}}$

ce qui montre que la répartition de la population des êtres unicellulaires se rapprochera au fil du temps de 400 000 individus dans l'état A et de 100 000 individus dans l'état B.

B. Étude, gestion et prévision économiques

1. Des tableaux de nombres pour la gestion

Voici les productions (en milliers) de deux usines de cycles appartenant à une même enseigne pour le premier semestre de l'année 2010 :

Premier semestre 2010

	VTT adultes	Vélos enfants	VTC	BMX	Vélos de course
Usine 1	12,99	13,20	5,58	1,53	1,95
Usine 2	4,62	4,98	2,16	0,51	0,78

Si on veut faire entrer les données de ce tableau dans un enchaînement de calcul, on les regroupe dans le tableau de nombres suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 12,99 & 13,20 & 5,58 & 1,53 & 1,95 \\ 4,62 & 4,98 & 2,16 & 0,51 & 0,78 \end{pmatrix}$$, appelé **matrice**.

Les productions (en milliers) des deux usines de cycles pour le second semestre de l'année 2010 sont les suivantes :

Second semestre 2010

	VTT adultes	Vélos enfants	VTC	BMX	Vélos de course
Usine 1	11,79	15,84	4,38	1,29	1,59
Usine 2	3,78	4,14	2,40	0,51	0,66

Ces données sont représentées par la matrice $B = \begin{pmatrix} 11,79 & 15,84 & 4,38 & 1,29 & 1,59 \\ 3,78 & 4,14 & 2,40 & 0,57 & 0,66 \end{pmatrix}$.

POUR INTRODUIRE LA SOMME DE DEUX MATRICES

La matrice C représentant la production annuelle pour ces deux usines est obtenue en ajoutant termes à termes les coefficients des deux matrices A et B. La matrice C est, par définition, la somme des matrices A et B. On note : $\boxed{C = A + B\,.}$

Si l'on appelle c_{ij} l'élément de la i-ième ligne et j-ième colonne de la matrice C, on a, pour tout i égal à 1 ou 2 et j compris entre 1 et 5 : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$$C = \begin{pmatrix} 24,78 & 29,04 & 9,96 & 2,82 & 3,54 \\ 8,40 & 9,12 & 4,56 & 1,08 & 1,44 \end{pmatrix}.$$

POUR INTRODUIRE LE PRODUIT D'UN NOMBRE ET D'UNE MATRICE

La matrice D qui représente la production moyenne par mois dans ces deux usines est obtenue en divisant chacun des coefficients c_{ij} par 12. Ainsi $D = \begin{pmatrix} 2,065 & 2,42 & 0,83 & 0,235 & 0,295 \\ 0,7 & 0,76 & 0,38 & 0,09 & 0,12 \end{pmatrix}$. On note $\boxed{D = \frac{1}{12} C}$.

2. Élaboration d'un indice de prix

Une association de consommateurs compare les prix de cinq produits p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 distincts dans trois magasins différents. Les observations fournissent les données suivantes :

Prix des produits à l'unité en euros

	Produit p1	**Produit p2**	**Produit p3**	**Produit p4**	**Produit p5**
magasin 1	1	5	2	3	4
magasin 2	1,1	4,7	1,8	3,1	3,8
magasin 3	0,9	5,1	1,9	3,2	4

On observe qu'on peut stocker les prix des produits sous la forme d'un tableau à 3 lignes et 5 colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1{,}1 & 4{,}7 & 1{,}8 & 3{,}1 & 3{,}8 \\ 0{,}9 & 5{,}1 & 1{,}9 & 3{,}2 & 4 \end{pmatrix}$$

Le panier d'une ménagère peut donc être représenté sous la forme d'un tableau à 5 lignes et 1 colonne :

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix}$$

POUR INTRODUIRE LE PRODUIT D'UNE MATRICE CARREE ET D'UNE MATRICE COLONNE

Le prix Π d'un panier dans chacun des 3 magasins se calcule alors de la façon suivante :

$$\Pi_1 = q_1 \times 1 + q_2 \times 5 + q_3 \times 2 + q_4 \times 3 + q_5 \times 4 = q_1 \times a_{11} + q_2 \times a_{12} + q_3 \times a_{13} + q_4 \times a_{14} + q_5 \times a_{15}$$

$$\Pi_2 = q_1 \times a_{21} + q_2 \times a_{22} + q_3 \times a_{23} + q_4 \times a_{24} + q_5 \times a_{25}$$

$$\Pi_3 = q_1 \times a_{31} + q_2 \times a_{32} + q_3 \times a_{33} + q_4 \times a_{34} + q_5 \times a_{35}$$

ce qui définit le produit de la matrice A par la matrice colonne Q. Dans notre exemple :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 30 \\ 29{,}2 \\ 30{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1{,}1 & 4{,}7 & 1{,}8 & 3{,}1 & 3{,}8 \\ 0{,}9 & 5{,}1 & 1{,}9 & 3{,}2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.}$$

3. Gestion des admissions et sorties dans un hôpital

On estime que les patients admis dans un certain service d'un hôpital peuvent se trouver dans l'un des 4 états suivants : 1. Soins réguliers, 2. Chirurgie, 3. Soins intensifs, 4. Sortie.

Cette estimation est décrite par le tableau suivant, dans lequel sont indiquées les probabilités de passage d'un des états à un autre dans un intervalle de 24 heures (probabilités obtenues par modélisation des fréquences observées sur une longue période).

Tableau de circulation des malades entre les services :

	1. Soins réguliers	2. Chirurgie	3. Soins intensifs	4. Sortie
1. Soins réguliers	0,6	0,2	0	0,2
2. Chirurgie	0,1	0	0,8	0,1
3. Soins intensifs	0,5	0	0,33	0,17
4. Sortie	0	0	0	0

Ce tableau se lit de la manière suivante : un malade se trouvant un jour en soins réguliers a la probabilité 0,6 de se trouver le lendemain en soins réguliers, 0,2 de se trouver en chirurgie, une probabilité nulle de se trouver en soins intensifs et la probabilité 0,2 de sortir etc.

Les informations chiffrées précédentes peuvent être stockées sous la forme d'un tableau (matrice) à 4 lignes et 4 colonnes :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,8 & 0,1 \\ 0,5 & 0 & 0,33 & 0,17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Supposons qu'un certain jour, la distribution des patients suivant les quatre états possibles s'écrive $X = (12 \quad 5 \quad 6 \quad 3)$. Le lendemain, la nouvelle distribution $X' = (m_1 \quad m_2 \quad m_3 \quad m_4)$ des nombres de malades par état d'hospitalisation (les m_i) est obtenue grâce au système suivant :

$$\begin{cases} m_1 = 12 \times 0,6 + 5 \times 0,1 + 6 \times 0,5 + 3 \times 0 \\ m_2 = 12 \times 0,2 + 5 \times 0 + 6 \times 0 + 3 \times 0 \\ m_3 = 12 \times 0 + 5 \times 0,8 + 6 \times 0,33 + 3 \times 0 \\ m_4 = 12 \times 0,2 + 5 \times 0,1 + 6 \times 0,17 + 3 \times 0 \end{cases}$$

qui donne $X' = (10,7 \quad 2,4 \quad 6 \quad 3,9)$.

Ce résultat (dans lequel on ne doit pas se formaliser de trouver des dixièmes d'êtres humains) peut se traduire par l'égalité matricielle suivante :

$$\boxed{X' = XM = (12 \quad 5 \quad 6 \quad 3)\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,8 & 0,1 \\ 0,5 & 0 & 0,33 & 0,17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Supposons qu'au jour 0, dix patients soient admis en soins réguliers et qu'il n'y ait aucun patient en cours de traitement. On note $X_0 = (10 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ la répartition des malades le jour 0 et X_k la répartition des malades au $k^{\text{ième}}$ jour, k entier positif.

Supposons également que 10 patients soient admis chaque jour.

Le processus se déroule de la manière suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} X_1 &= \begin{pmatrix}10 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} M + \begin{pmatrix}10 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \\ X_2 &= X_1 M + \begin{pmatrix}10 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = X_0 M^2 + X_0 M + X_0 \end{aligned}}$$

Les calculs confiés à un tableur montrent que la situation tend à se stabiliser.

Jour	soins réguliers	chirurgie	soins intensifs	sortie
	10	0	0	0
1	16	2	0	2
2	19,8	3,2	1,6	3,4
3	23	3,96	3,093333	4,546666
4	25,742666	4,6	4,199111	5,511555
5	28,005155	5,148533	5,079703	6,308385
6	29,857798	5,601031	5,812061	6,962501
7	31,380812	5,971559	6,418178	7,500339
8	32,634732	6,276162	6,916640	7,943014
9	33,666776	6,526946	7,326476	8,307336
10	34,5159989	6,733355	7,6637162	8,607129
	…	…	…	…
26	38,287128	7,649911	9,161498	9,938429
27	38,318018	7,657425	9,173767	9,949334
28	38,343437	7,663603	9,183863	9,958307

On pourrait continuer le calcul littéral précédent, pour aboutir à l'égalité suivante.

Pour tout n entier supérieur ou égal à 2, $\boxed{X_n = X_0\,(M^n + M^{n-1} + \ldots + M^2 + M + I)}$, où I désigne la matrice identité d'ordre 4 (de format (4,4), dont les coefficients sont tous nuls sauf sur la diagonale principale où ils sont tous égaux à 1).