Ressources pour la classe terminale
générale et technologique

QUELQUES PASSAGES DE LA PREMIERE PARTIE

- Marche aléatoire

Mathématiques
Série S

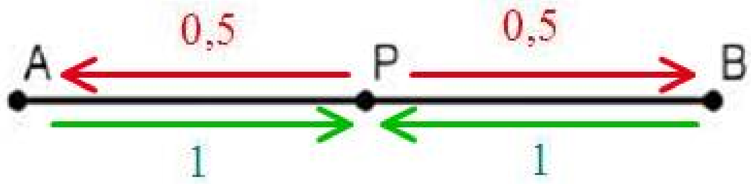
Enseignement de spécialité

E. Marches aléatoires

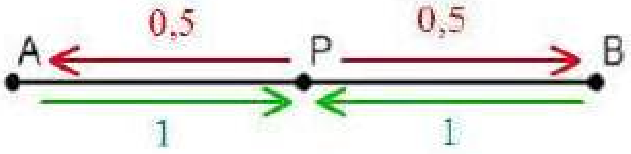
Dans cette partie, on s'intéresse au comportement à long terme d'une marche aléatoire. Il s'agit de calculer les probabilités pour le héros d'une marche aléatoire dans un réseau de se trouver après n pas en tel ou tel sommet (ou nœud) du réseau.

1. Marche aléatoire sur un segment

Le personnage se déplace d'un sommet à l'autre du graphe ci-dessous. S'il est en A ou en B, il ne peut aller qu'en P, s'il est en P, il peut aller en A ou en B avec des probabilités que nous considérons comme identiques.



On peut représenter la situation par une matrice M (dite de transition) qui indique non les arêtes existantes comme dans les matrices d'adjacence, mais les probabilités de passage d'un sommet à un autre. Les *matrices de transition* ne sont pas systématiquement symétriques. La matrice M ci-dessous représente la marche dans le réseau (A, P, B).



$$\begin{array}{c} \\ A \\ P \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & P & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matrice de transition est la même que celle de l'exercice précédent (Le modèle d' EHRENFEST, et le cas N = 2)

Les coefficients figurant sur chaque ligne donnent les probabilités de passage du sommet qui donne son nom à la ligne à celui qui donne son nom à la colonne. La diagonale ne contient de ce fait que des 0.

Pour aller de A à A en deux pas, le personnage peut aller de A à A puis de A à A (les probabilités sont 0 et 0), ou de A à P puis de P à A (probabilités 1 et ½), ou de A à B puis de B à A (probabilités 0 et 0). La probabilité pour qu'il aille de A à A en deux pas est donc : $0\times 0+1\times\frac{1}{2}+0\times 0=\frac{1}{2}$.

Pour aller de A à B en deux pas, le personnage peut aller de A à A puis de A à B (probabilités 0 et 0), ou de A à P puis de P à B (probabilités 1 et ½), ou de A à B et de B à B (probabilités 0 et 0). La probabilité pour qu'il aille de A à B en deux pas est donc : $0\times 0+1\times\frac{1}{2}+0\times 0=\frac{1}{2}$.

La première probabilité s'obtient en additionnant terme à terme les produits des coefficients de la ligne correspondant aux déplacements partant de A par ceux de la colonne correspondant aux déplacements arrivant en A.

La seconde s'obtient en faisant la somme des produits terme à terme des coefficients de la « ligne A » par ceux de la « colonne B ».

En itérant le procédé on obtient la probabilité de chacun des trajets de deux pas. Cela revient à calculer le produit de la matrice précédente (notée M) par elle-même, c'est-à-dire la matrice M^2. Les coefficients qui figurent dans cette matrice M^2 sont les probabilités pour que le personnage situé au sommet qui donne son nom à la colonne se soit trouvé deux coups auparavant au sommet qui donne son nom à la ligne.

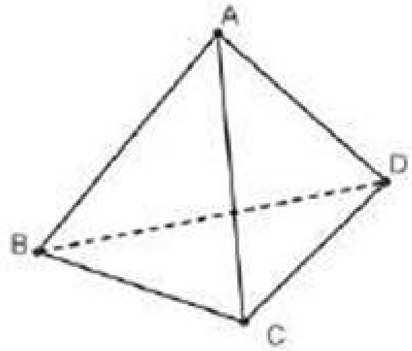
On obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad et \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate que $M^3 = M$.

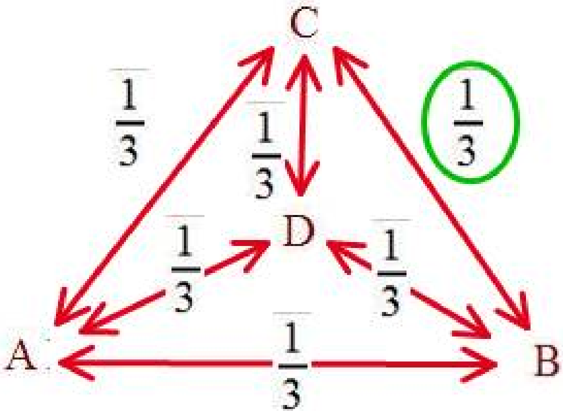
On peut interpréter ce résultat : par exemple, partant du sommet A, le personnage est sûrement en P après un nombre impair de pas, en B ou en A avec des probabilités $\frac{1}{2}$ après un nombre pair de pas.

2. Marche aléatoire aux sommets d'un tétraèdre



À la différence de la situation précédente, dans la marche aux sommets d'un triangle comme dans la marche aux sommets d'un tétraèdre, on peut passer, à chaque étape, de tout sommet donné à tout autre sommet donné.

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, la matrice de transition (donnant les probabilités de passage d'un sommet à un autre) s'écrit :



$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

On peut démontrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif, la puissance $n^{\text{ième}}$ de la matrice M s'écrit :

$$M^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & v_n & v_n \end{pmatrix}$$

où les termes généraux des suites (u_n) et (v_n) sont : $u_n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$ et $v_n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$.

La lecture de ces matrices de transition est naturellement la même qu'au paragraphe précédent : le coefficient générique – celui situé sur la ligne i et la colonne j – de la matrice M^n donne la probabilité qu'une chaîne de longueur n permette de passer du sommet i au sommet j (on peut supposer que les sommets A, B, C, D sont numérotés 1, 2, 3, 4). Il n'y a pas d'ambiguïté dans ce cas, la matrice est symétrique (les puissances d'une matrice symétrique sont symétriques).

Les différences entre les différentes probabilités s'estompent rapidement : s'il n'est pas possible de passer d'un sommet à lui-même en un pas, les probabilités d'aller d'un sommet quelconque à un sommet quelconque sont très voisines dès que n est grand. En effet, la limite commune des deux suites (u_n) et (v_n) est $\frac{1}{4}$.

3. Un retour en arrière est-il possible ?

Ayant quitté un sommet du tétraèdre, au bout de combien de pas aléatoires le personnage peut-il compter y revenir ?

Soit X la variable aléatoire donnant, pour chaque marche, ce nombre de pas.

On a : $P(X=1)=0$, $P(X=2)=\frac{1}{3}$, $P(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$. En effet, pour que le personnage soit en A, par exemple, après n pas sans y avoir été dans aucune de ses positions précédentes, il est nécessaire qu'à chacun de ses déplacements précédents il soit passé d'un sommet qui n'était pas A à un autre qui n'était pas A non plus, choisissant donc l'un de deux sommets sur trois possibles.

On peut vérifier par récurrence que $P(X=n)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\times\frac{1}{3}$, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et observer que :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=2}^{n} P(X=k)\right)=1$$

La variable X suit donc une loi géométrique.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/marche/marche1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/marche/marche2.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/marche/marche3.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/marche/marche4.jsp