LES ELEVES
ET
DES ACTIVITES
D'INTRODUCTION

Tableau 1	Prix du crayon	Prix de la gomme	J'achète :	Cela va coûter :
Magasin A	3 euros	2 euros	10 crayons et 20 gommes	70 € au magasin A

Tableau 2	Prix du crayon	Prix de la gomme	J'achète :	Cela va coûter :
Magasin A	4 euros	2 euros	10 crayons et 20 gommes	80 € au magasin A
Magasin B	5 euros	3 euros		110 € au magasin B

Tableau 3	Prix du crayon	Prix de la gomme	J'achète :	Cela va coûter :
Magasin A	8 euros	4 euros	7 crayons 6 gommes	80 € au magasin A
Magasin B	9 euros	2 euros		75 ~~110~~ € au magasin B

Tableau 4	Prix du crayon	Prix de la gomme	J'achète :		Cela va coûter :
Magasin A	4	3	13	=	67 €
Magasin B	5	4	5		85 €

Compléter :

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ 52 \end{pmatrix}$$

L'activité démarre vite et bien...

$$\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 53 \end{pmatrix}$$

En mathématiques, ces tableaux peuvent s'écrire comme le produit d'une matrice carrée d'ordre 2 (ou plus!) et d'une matrice colonne :

En mathématiques, ces tableaux peuvent s'écrire comme le produit d'une matrice carrée d'ordre 2 (ou plus!) et d'une matrice colonne :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 54 \\ 69 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 33 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 31 \\ 36 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -18 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ce travail permet rapidement
d'introduire la nouvelle notion.

Une petite énigme pour découvrir la méthode de codage de Hill avant de travailler avec le tableur

2. Mise en pratique des matrices avec une méthode de décodage à découvrir

(En 1929, Lester S. Hill a conçu, breveté et mis en vente cette méthode de codage, sans grand succès.)

Vous venez de recevoir un courriel. Il contient un message secret à décoder et une pièce jointe qui semble donner des explications pour utiliser sa «clé»... Travailler pour l'instant sans ordinateur, vous aurez la suite du message à décoder sur un tableur.

Début du message secret :

23 5 12 23 30 4 7 18 23 7

En pièce jointe sur le tableur :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[	\	]	^

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Utiliser la matrice A (qui est la matrice de « déchiffrement ») et les restes de la division par le nombre **31**.

2. Mise en pratique des matrices avec une méthode de décodage à découvrir

(En 1929, Lester S. Hill a conçu, breveté et mis en vente cette méthode de codage, sans grand succès.)

Vous venez de recevoir un courriel. Il contient un message secret à décoder et une pièce jointe qui semble donner des explications pour utiliser sa «clé»... Travailler pour l'instant sans ordinateur, vous aurez la suite du message à décoder sur un tableur.
Début du message secret :

23 5 12 23 30 4 7 18 23 7

L A \ M A C H I N E

En pièce jointe sur le tableur :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[	\	]	*

$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ Utiliser la matrice A (qui est la matrice de « déchiffrement ») et les restes de la division par le nombre 31

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 23 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 74 \\ 125 \end{pmatrix}$ $\quad 74 = 31 \times 2 + 12$ $\quad 125 = 31 \times 4 + 1$ $\quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 59 \\ 106 \end{pmatrix}$

La méthode de HILL
L'énoncé avec le tableur

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
4												
5												
6	Nombre :	31										
7												
8	Matrice A :	3	1									
9		5	2									
10												
11	Message :	23	5	12	23	30	4	7	18	23	7	
12	déchiffrement:											
13	Décodage:											
14												
15												
16	Aide :	Le reste de 65/31 est donné par MOD(65;31)										
17		CAR(65) donne A; CAR(66) donne B… et CAR(92) donne \										
18												

La méthode de HILL
Correction avec le tableur

B12 =MOD($B8*B11+$C8*C11;B6)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
4												
5												
6	Nombre :	31										
7												
8	Matrice A :	3	1									
9		5	2									
10												
11	Message :	23	5	12	23	30	4	7	18	23	7	
12	Déchiffrement :	12	1	28	13	1	3	8	9	14	5	28
13	Décodage:	L	A	\	M	A	C	H	I	N	E	\
14												
15												

B13 =CAR(64+B12)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
4											
5											
6	Nombre :	31									
7											
8	Matrice A :	3	1								
9		5	2								
10											
11	Message :	23	5	12	23	30	4	7	18	23	
12	Déchiffrement :	12	1	28	13	1	3	8	9	14	5
13	Décodage:	L	A	\	M	A	C	H	I	N	E
14											
15											

3. Introduction du produit de deux matrices

Marche aléatoire de «deux pas» sur un graphe à deux sommets : une évolution de population

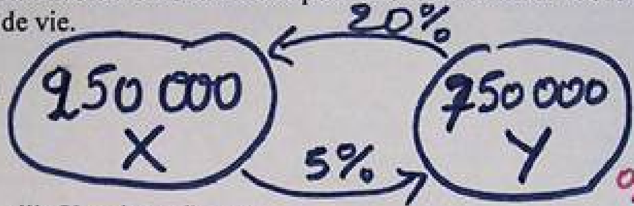
I) Énoncé I : une évolution de population

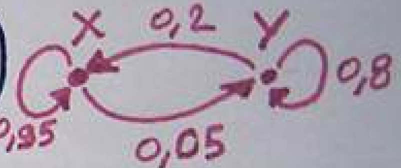
Le travail se fait en petits groupes.

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires. A l'année zéro, un quart des habitants sont en X.

A) Lors de l'année 0 : 20% des habitants de Y partent habiter dans la ville X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5% des habitants de X partent habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.

a) Représenter la situation par un schéma.





b) Déterminer le nombre d'habitants de la ville X au bout d'un an.

$0,95 \times 250000 + 0,2 \times 750\,000 = 387\,500$ habitants

c) Compléter ce tableau:

X puis X — Y puis X

Avec des fréquences	De X à ?	De Y à ?	A l'année 0		Au bout d'un an:
De ? à X	Qui restent en X 0,95	Qui viennent de Y 0,2	250.000 habitants dans la ville X et		387500... habitants dans la ville X
De ? à Y	Qui viennent de X 0,05	Qui restent en Y 0,8	750.000 habitants dans la ville Y		612.500......... habitants dans la ville Y

X puis Y — Y puis Y

Avec n un entier naturel, on note U_n la matrice colonne de deux lignes :

en première ligne : le nombre d'habitants dans la ville X au début de l'année n.

en deuxième ligne : le nombre d'habitants de la ville Y au début de l'année n.

On note A la matrice qui vérifie $AU_0=U_1$.

d) Écrire les matrices U_0, U_1 et A.

$U_0 = \begin{pmatrix} 250\,000 \\ 750\,000 \end{pmatrix}$ $U_1 = \begin{pmatrix} 387\,500 \\ 612\,500 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}$

e) Quel pourcentage est représenté par le coefficient de la première ligne et de la première colonne de la matrice A?

3. Introduction du produit de deux matrices
Marche aléatoire de «deux pas» sur un graphe à deux sommets : une évolution de population

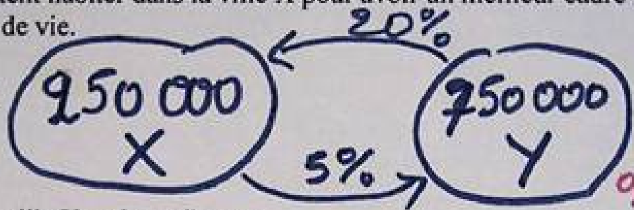
I) Énoncé I : une évolution de population

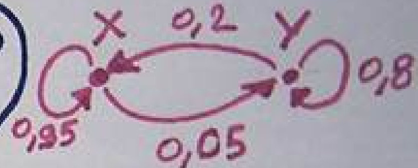
Les élèves proposent des schémas, une vision du graphe attendu s'impose.

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y
salaires. A l'année zéro, un quart des habitants sont en X.

A) Lors de l'année 0 : 20% des habitants de Y partent habiter dans la ville X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5% des habitants de X partent habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.

a) Représenter la situation par un schéma.





b) Déterminer le nombre d'habitants de la ville X au bout d'un an.

$0,95 \times 250000 + 0,2 \times 750\,000 = 387\,500$ habitants

c) Compléter ce tableau:

X puis X — Y puis X

Avec des fréquences	De X à ?	De Y à ?	A l'année 0		Au bout d'un an:
De ? à X	Qui restent en X 0,95	Qui viennent de Y 0,2	250.000 habitants dans la ville X et		387.500... habitants dans la ville X
De ? à Y	Qui viennent de X 0,05	Qui restent en Y 0,8	750.000 habitants dans la ville Y		612.500............ habitants dans la ville Y

X puis Y — Y puis Y

Avec n un entier naturel, on note U_n la matrice colonne de deux lignes :
en première ligne : le nombre d'habitants dans la ville X au début de l'année n.
en deuxième ligne : le nombre d'habitants de la ville Y au début de l'année n.

On note A la matrice qui vérifie $AU_0=U_1$.

d) Écrire les matrices U_0, U_1 et A.

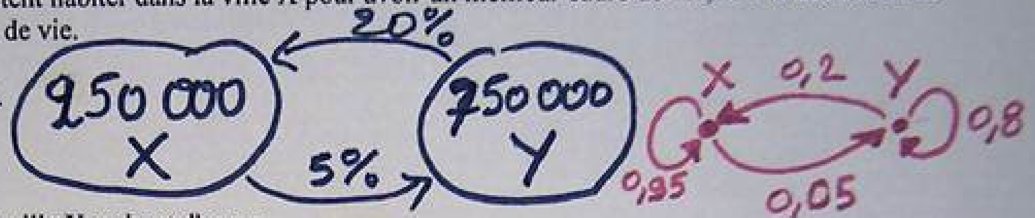
$$U_0 = \begin{pmatrix} 250\,000 \\ 750\,000 \end{pmatrix} \quad U_1 = \begin{pmatrix} 387\,500 \\ 612\,500 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}$$

e) Quel pourcentage est représenté par le coefficient de la première ligne et de la première colonne de la matrice A?

salaires. A l'année zéro, un quart des habitants sont en X.

A) Lors de l'année 0 : 20% des habitants de Y partent habiter dans la ville X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5% des habitants de X partent habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.

a) Représenter la situation par un schéma.



b) Déterminer le nombre d'habitants de la ville X au bout d'un an.

$0,95 \times 250000 + 0,2 \times 750\,000 = 387\,500$ habitants

c) Compléter ce tableau:

X puis X — Y puis X

Avec des fréquences	De X à ?	De Y à ?	A l'année 0		Au bout d'un an:
De ? à X	Qui restent en X 0,95	Qui viennent de Y 0,2	250.000 habitants dans la ville X et		387500.... habitants dans la ville X
De ? à Y	Qui viennent de X 0,05	Qui restent en Y 0,8	750.000 habitants dans la ville Y		612.500.... habita

X puis Y — Y puis Y

Ces premiers résultats sont encourageants, cette première étape leur donne une vision des possibilités de cette nouvelle écriture...

Avec n un entier naturel, on note U_n la matrice colonne de deux lignes :

en première ligne : le nombre d'habitants dans la ville X au début de l'année n.

en deuxième ligne : le nombre d'habitants de la ville Y au début de l'année n.

On note A la matrice qui vérifie $AU_0=U_1$.

d) Écrire les matrices U_0, U_1 et A.

$$U_0 = \begin{pmatrix} 250\,000 \\ 750\,000 \end{pmatrix} \quad U_1 = \begin{pmatrix} 387\,500 \\ 612\,500 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}$$

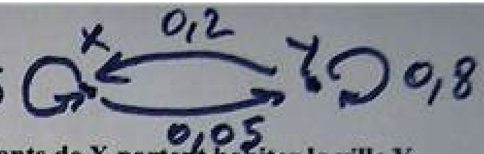
e) Quel pourcentage est représenté par le coefficient de la première ligne et de la première colonne de la matrice A?

95% des habitants qui restent dans la ville X

f) Quel pourcentage est représenté par le coefficient de la deuxième ligne et de la première colonne de la matrice A?

5% des habitants qui vont de la ville X à la ville Y

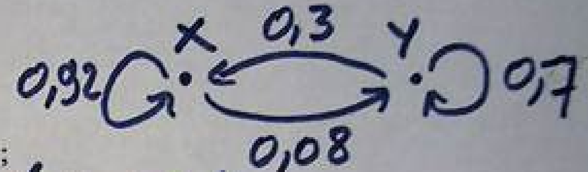
L'écriture d'une matrice de transition semble être acquise.

Année 0 à 1


B) Lors de l'année 1: 30% des habitants de Y partent habiter la ville X, et 8% des habitants de X partent habiter la ville Y.

a) Déterminer la matrice B telle que $BU_1 = U_2$ et en déduire U_2 :

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}92 & 0{,}3 \\ 0{,}08 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

Année 1 à 2


b) En déduire le nombre d'habitants de la ville X et de la ville Y à l'année 2 ;

$$BU_1 = \begin{pmatrix} 0{,}92 & 0{,}3 \\ 0{,}08 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 387\,500 \\ 612\,500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 540\,250 \\ 459\,750 \end{pmatrix} = U_2$$

c) Quel pourcentage est représenté par le coefficient de la première ligne et de la première colonne de la matrice B?

92% des habitants restent dans la ville X de l'année 1 à l'année 2.

d) Montrer que $B(AU_0)=U_2$.

$B(AU_0) = BU_1$ car $U_1 = AU_0$ d'où $B(AU_0) = BU_1 = U_2$

Mais cela va bientôt se compliquer avec BA...

C) On note C la matrice qui vérifie $CU_0=U_2$.

a) Quel pourcentage est représenté par le coefficient de la première ligne et de la première colonne de la matrice C? Calculer ce pourcentage.

b) i) Déterminer le pourcentage des habitants de la ville Y de l'année 0 qui ont vécu l'année 1 dans la ville de X et qui y sont restés à l'année 2.

ii) Déterminer le pourcentage des habitants qui habitaient Y aux années 1 et 0 avant de vivre dans la ville de X à l'année 2.

iii) Que représente la somme de ces deux pourcentages?

iv) En déduire un des quatre coefficients de la matrice C.

c) Calculer les autres coefficients de la matrice C en expliquant votre démarche. Puis écrire C.

d) Déterminer une technique pour calculer la matrice C en fonction des coefficients des matrices A et B.

Pour vous aider :

De l'année 1 à 2	De X à ?	De Y à ?
De ? à X	De X à X	De Y à X ......
De ? à Y	De X à Y	De Y à Y ......

De l'année 0 à 1	De X à ?	De Y à ?
De ? à X	De X à X	De Y à X ......
De ? à Y	De X à Y	De Y à Y ......

=

De l'année 0 à 2	De X à ?	De Y à ?
De ? à X	De X à X	De Y à X ......
De ? à Y	De X à Y	De Y à Y ......

X puis ? puis X

C) On note C la matrice qui vérifie $CU_0=U_2$.

a) Quel pourcentage est représenté par le coefficient de la première ligne et de la première colonne de la matrice C?
Calculer ce pourcentage. Le pourcentage des habitants qui restent ou reviennent dans la ville X de l'année 0 à l'année 2.

92% de 95% + 30% de 5%

88,9%

b) i) Déterminer le pourcentage des habitants de la ville Y de l'année 0 qui ont vécu l'année 1 dans la ville de X et qui y sont restés à l'année 2.

92% de 20% sont 18,4%

Y puis X puis X

ii) Déterminer le pourcentage des habitants qui habitaient Y aux années 1 et 0 avant de vivre dans la ville de X à l'année 2.

30% de 80% soit 24%

Y puis Y puis X

iii) Que représente la somme de ces deux pourcentages?

18,4 + 24 = 42,4 42,4% représente le pourcentage des habitants qui vont de Y à X de l'année 0 à l'année 2

iv) En déduire un des quatre coefficients de la matrice C.

$\begin{pmatrix} \cdot & 0{,}424 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

Y puis ? puis X

Y ou X

de 0 à 2

c) Calculer les autres coefficients de la matrice C en expliquant votre démarche. Puis écrire C.

d) Déterminer une technique pour calculer la matrice C en fonction des coefficients des matrices A et B.

Pour vous aider : X puis X puis X ou X puis ~~Y~~ puis X

0,92×0,95 + 0,3×0,05

De l'année 1 à 2	De X à ?	De Y à ?
De ? à X	De X à X 0,92	De Y à X 0,3
De ? à Y	De X à Y 0,08	De Y à Y 0,7

de 1 à 2 X puis Y

De l'année 0 à 1	De X à ?	De Y à ?
De ? à X	De X à X 0,95	De Y à X 0,2
De ? à Y	De X à Y 0,05	De Y à Y 0,8

de 0 à 1 X puis Y

=

De l'année 0 à 2	De X à ?	De Y à ?
De ? à X	De X à X 0,889	De Y à X 0,424
De ? à Y	De X à Y 0,111	De Y à Y 0,576

de 0 à 2

X puis ? puis Y

X ou Y

A savoir : On dit que C est le produit de la matrice B et de la matrice A, on écrit C = BA.

e) On suppose maintenant que le million d'habitants est également réparti entre les villes X et Y à l'année 0.
Déterminer le nombre de personnes qui vivraient alors dans la ville X à l'année 2. 656 500

f) A-t-on BA = AB ?

Non.

$$C\begin{pmatrix} 500000 \\ 500000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}889 & 0{,}424 \\ 0{,}111 & 0{,}576 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 500000 \\ 500000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 656500 \\ 343500 \end{pmatrix}$$

II) Énoncé II : 25 ans plus tard...

X puis ? puis X

C) On note C la matrice qui vérifie $CU_0=U_2$.

a) Quel pourcentage est représenté par le coefficient de la première ligne et de la première colonne de la matrice C? Calculer ce pourcentage.

Le pourcentage des habitants qui restent ou reviennent dans la ville X de l'année 0 à l'année 2.

92% de 95% + 30% de 5%

88,9%

b) i) Déterminer le pourcentage des habitants de la ville Y de l'année 0 qui ont vécu l'année 1 dans la ville de X et qui y sont restés à l'année 2.

92% de 20% soit 18,4 %

Y puis X puis X

ii) Déterminer le pourcentage des habitants qui habitaient Y aux années 1 et 0 avant de vivre dans la ville de X à l'année 2.

30% de 80% soit 24%

Y puis Y puis X

iii) Que représente la somme de ces deux pourcentages?

18,4 + 24 = 42,4   42,4% représente le pourcentage des habitants qui vont de Y à X de l'année 0 à l'année 2

iv) En déduire un des quatre coefficients de la matrice C.

$\begin{pmatrix} \cdot & 0{,}424 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

Y puis ? puis X

Y ou X

c) Calculer les autres coefficients de la matrice C en expliquant votre démarche. Puis écrire C.

de 0 à 2

d) Déterminer une technique pour calculer la matrice C en fonction des coefficients des matrices A et B.

Pour vous aider : X puis X puis X ou X puis ~~Y~~ puis X   0,92×0,95 + 0,3×0,05

De l'année 1 à 2	De X à ?	De Y à ?
De ? à X	De X à X 0,92	De Y à X 0,3
De ? à Y	De X à Y 0,08	De Y à Y 0,7

De l'année 0 à 1	De X à ?	De Y à ?
De ? à X	De X à X 0,95	De Y à X 0,2
De ? à Y	De X à Y 0,05	De Y à Y 0,8

=

De l'année 0 à 2	De X à ?	De Y à ?
De ? à X	De X à X 0,889	De Y à X 0,424
De ? à Y	De X à Y 0,111	De Y à Y 0,576

de 1 à 2 X puis Y   de 0 à 1 X puis Y

X puis ? puis Y

X ou Y

<u>A savoir</u> : **On dit que C est le produit de la matrice B et de la matrice A, on écrit C = BA.**

Un apport a permis de poursuivre le travail plus facilement:
«X puis Y puis Y»
«X puis X puis Y»
«X puis Y puis X»
...

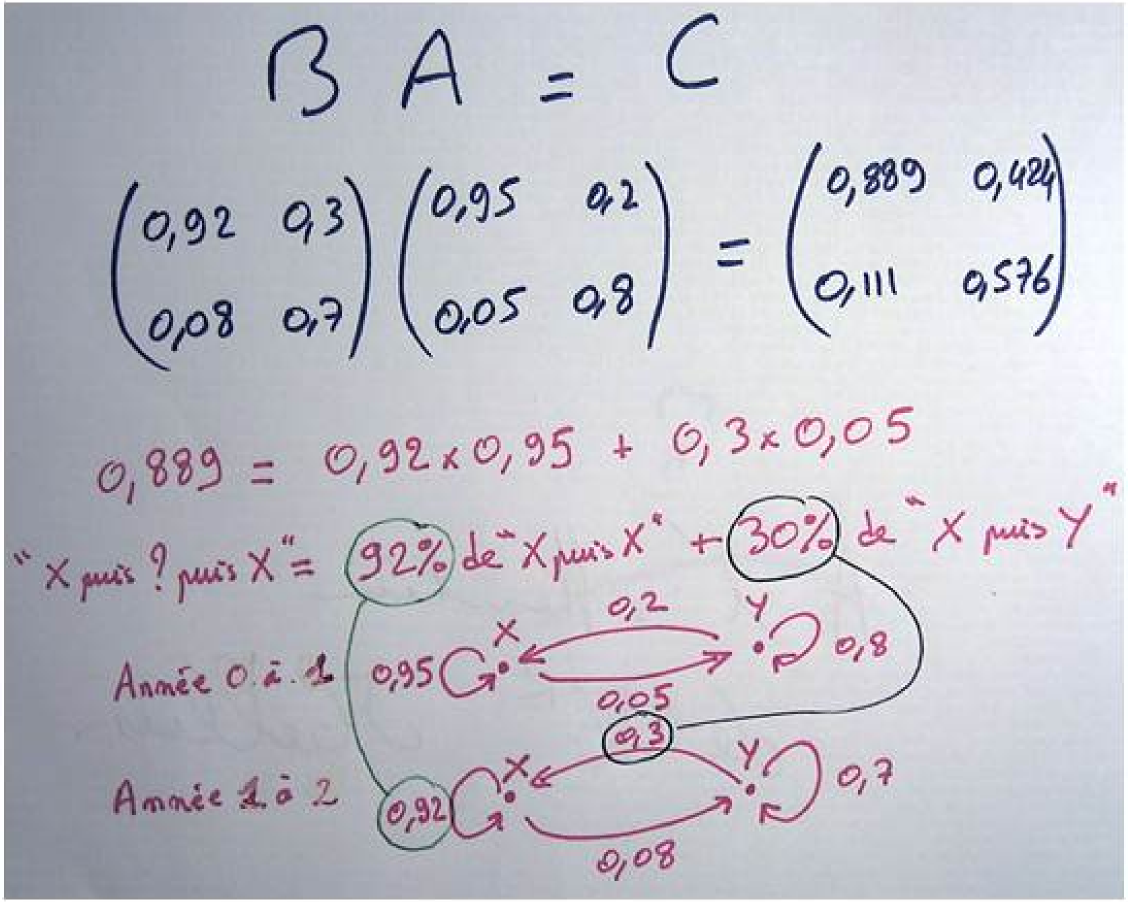
e) On suppose maintenant que le million d'habitants est également réparti entre les villes X et Y à l'année 0. Déterminer le nombre de personnes qui vivraient alors dans la ville X à l'année 2. 656 500

$$C\begin{pmatrix}500000\\500000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}889 & 0{,}424\\0{,}111 & 0{,}576\end{pmatrix}\begin{pmatrix}500000\\500000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}656500\\343500\end{pmatrix}$$

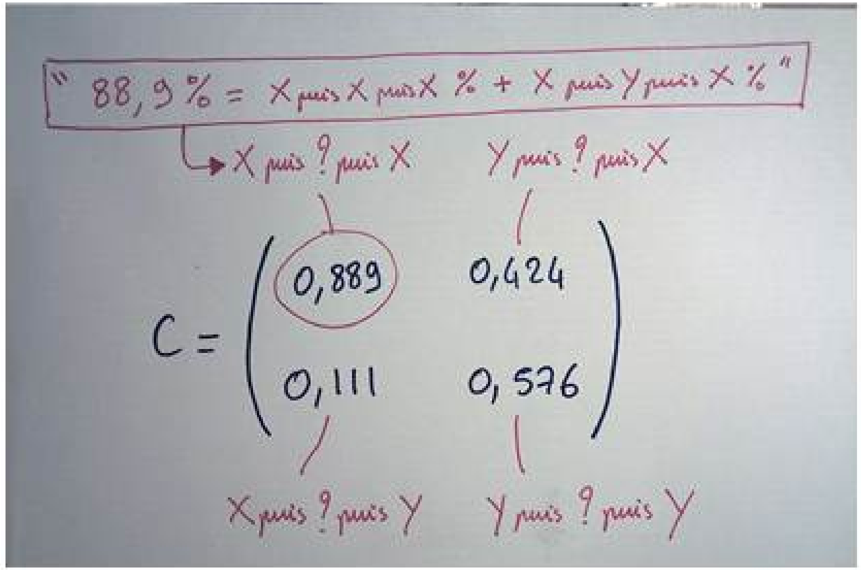
f) A-t-on BA = AB ?

Non.

<u>II) Énoncé II : 25 ans plus tard...</u>



… et toujours avec cet abus de langage,
«X puis ? puis Y» revient à l'événement :
«X puis X puis Y» ou «X puis Y puis Y»

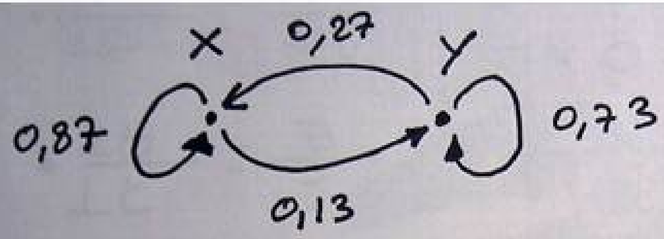


Bien que ces «puis» ne donnent pas une rédaction rigoureuse,
les élèves comprennent plus facilement le sens des calculs et l'écriture de la matrice C.
De toute façon, cette première approche est faite «au brouillon»,
nous aurons le temps de rédiger correctement, avec le vocabulaire attendu.

II) Enoncé II : 25 ans plus tard...

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires. A l'année zéro, un quart des habitants sont en X. Chaque année, 27% des habitants de Y partent habiter dans la ville X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 13% des habitants de X partent habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.

Déterminer le nombre d'habitants de la ville X à la 25e année. (utiliser un logiciel de calcul)



Avec $x_0 = 250\,000$ et $y_0 = 750\,000$

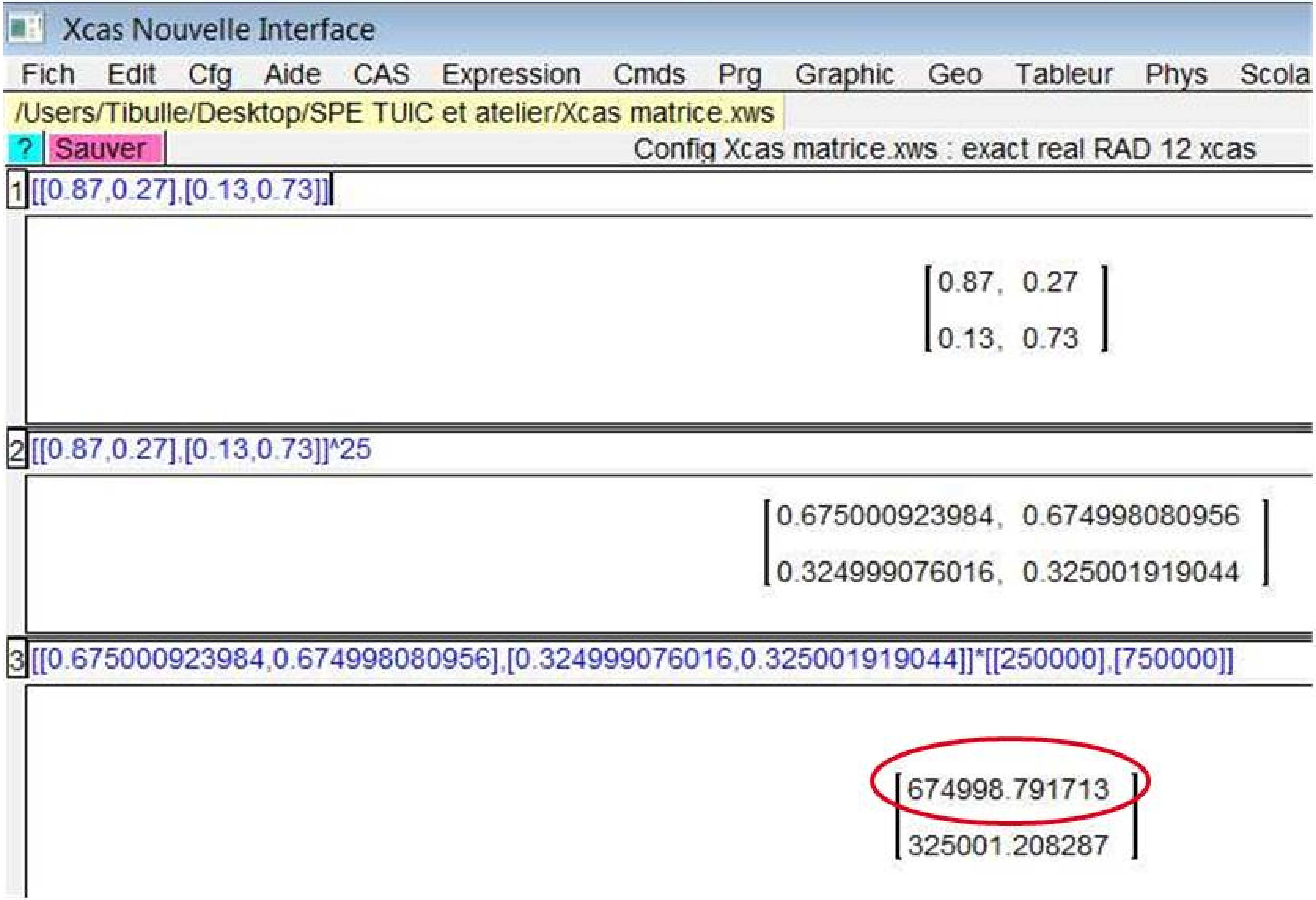
on a $\begin{cases} x_{n+1} = 0,87\, x_n + 0,27\, y_n \\ y_{n+1} = 0,13\, x_n + 0,73\, y_n \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

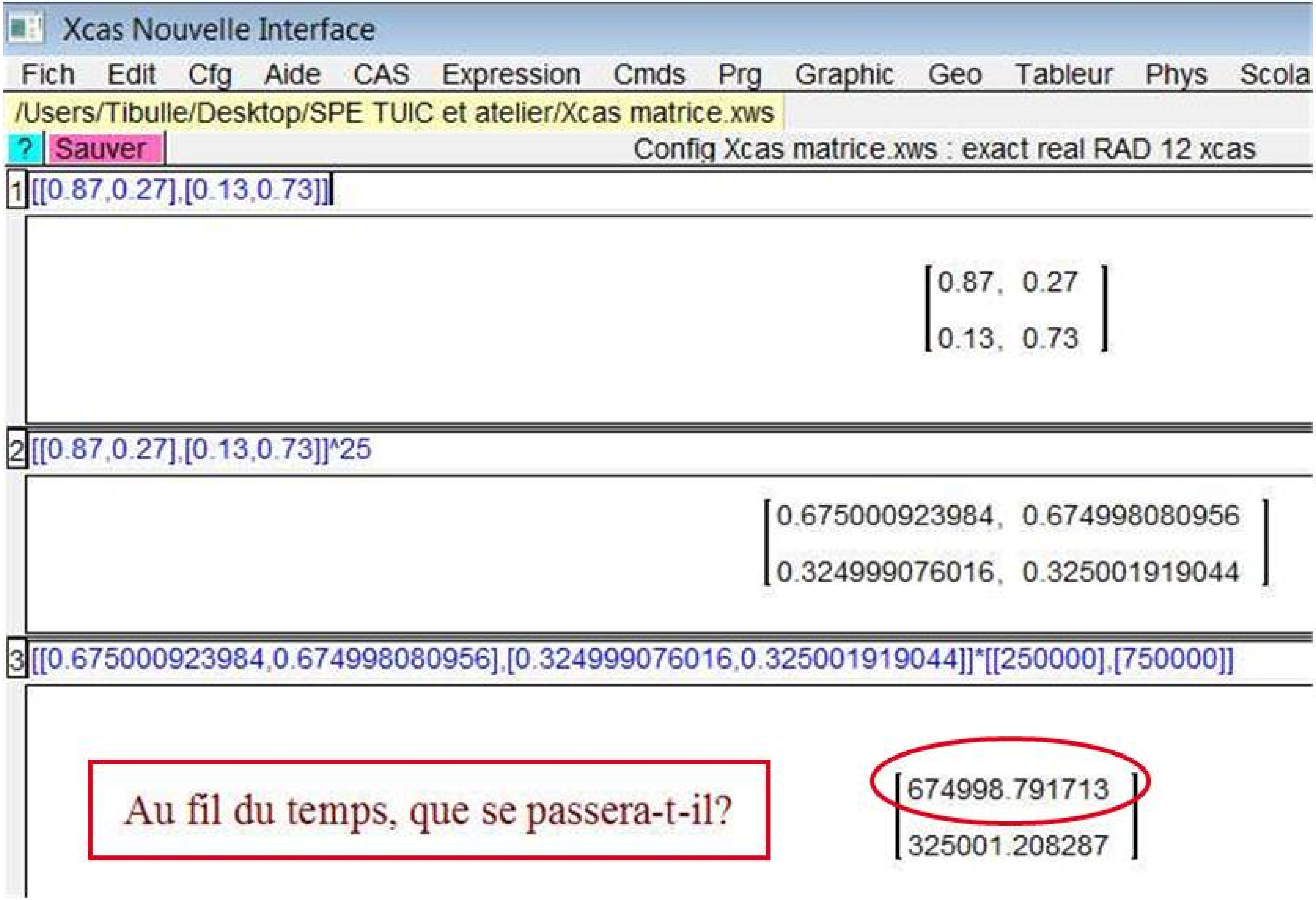
d'où $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,87 & 0,27 \\ 0,13 & 0,73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{pmatrix} x_{25} \\ y_{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,87 & 0,27 \\ 0,13 & 0,73 \end{pmatrix}^{25} \begin{pmatrix} 250\,000 \\ 750\,000 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 674\,999 \\ 325\,001 \end{pmatrix}$$

Calculer avec Xcas, par exemple.

On peut aussi travailler avec un tableur, sans passer par les matrices.


Xcas Nouvelle Interface
Fich Edit Cfg Aide CAS Expression Cmds Prg Graphic Geo Tableur Phys Scola
/Users/Tibulle/Desktop/SPE TUIC et atelier/Xcas matrice.xws
? Sauver
Config Xcas matrice.xws : exact real RAD 12 xcas
1 [[0.87,0.27],[0.13,0.73]]
0.87, 0.27
0.13, 0.73
2 [[0.87,0.27],[0.13,0.73]]^25
0.675000923984, 0.674998080956
0.324999076016, 0.325001919044
3 [[0.675000923984,0.674998080956],[0.324999076016,0.325001919044]]*[[250000],[750000]]
674998.791713
325001.208287


Xcas Nouvelle Interface
Fich Edit Cfg Aide CAS Expression Cmds Prg Graphic Geo Tableur Phys Scola
/Users/Tibulle/Desktop/SPE TUIC et atelier/Xcas matrice.xws
? Sauver
Config Xcas matrice.xws : exact real RAD 12 xcas
1 [[0.87,0.27],[0.13,0.73]]
0.87, 0.27
0.13, 0.73
2 [[0.87,0.27],[0.13,0.73]]^25
0.675000923984, 0.674998080956
0.324999076016, 0.325001919044
3 [[0.675000923984,0.674998080956],[0.324999076016,0.325001919044]]*[[250000],[750000]]
Au fil du temps, que se passera-t-il?
674998.791713
325001.208287

? Sauver Config Xcas matrice.xws : exact real RAD 12 xcas

4 [[0.87,0.27],[0.13,0.73]]^35

$$\begin{bmatrix} 0.675000005587, & 0.674999988396 \\ 0.324999994413, & 0.325000011604 \end{bmatrix}$$

5 [[0.87,0.27],[0.13,0.73]]^45

$$\begin{bmatrix} 0.675000000034, & 0.67499999993 \\ 0.324999999966, & 0.32500000007 \end{bmatrix}$$

6 [[0.87,0.27],[0.13,0.73]]^55

$$\begin{bmatrix} 0.675, & 0.675 \\ 0.325, & 0.325 \end{bmatrix}$$

Et si n est encore plus grand,
si on fait abstraction des erreurs
de calcul dues au logiciel Xcas :
le système est stable

7 [[0.87,0.27],[0.13,0.73]]^55*[[250000],[750000]]

$$\begin{bmatrix} 675000.0 \\ 325000.0 \end{bmatrix}$$

La population se rapprochera
au fil du temps de 675 000 individus
dans la ville X.

8

I) Du système aux matrices :

a) Une punition vient d'être donnée à votre petit frère qui est en troisième. Son professeur lui a dit qu'il pouvait vous demander de lui simplifier le travail (calculatrice interdite!).

Punition : Donner la solution de chacun de ces systèmes		
$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$
$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 4 \end{cases}$
$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = -4 \\ x - y = 5 \end{cases}$

b) Comme vous venez de donner toutes les solutions «de tête» à votre frère, par curiosité, il vous pose une question...
Résoudre ce système (en fonction de a et b, des nombres réels fixés) :

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$2x = a+b,\ x = \frac{a+b}{2}\ ,\ y = \frac{a-b}{2}$

$N\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

c) Avec des matrices :

i) Avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, déterminer M la matrice carrée d'ordre 2 pour que MX=B soit équivalent au système de b).

ii) Déterminer N la matrice carrée d'ordre 2 qui permet de connaître la solution (en colonne) de la question b) en faisant le produit NB.

iii) Faire le produit à gauche par N de chaque membre de MX=B. Que remarquez-vous?

$NMX = NB$
$X = NB$

iii) Faire le produit à gauche par N de chaque membre de MX=B. Que remarquez-vous?

$NMX = NB$

$X = NB$

$\begin{cases} 6x+8y=0 \\ 5x+7y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-4 \\ y=3 \end{cases}$

II) Des matrices au système :

a) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 50 \\ 43 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3,5 \\ -2,5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x+8y \\ 5x+7y \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 38 \\ 11 & 33 \end{pmatrix}$

h) En utilisant les résultats précédents, compléter :

$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3,5 & -4 \\ -2,5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 3,5 & -4 \\ -2,5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 3,5 & -4 \\ -2,5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 3,5 & -4 \\ -2,5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 33 \\ -38 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 267,5 \\ 196,5 \end{pmatrix}$

l) Résoudre $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 33 \\ -38 \end{pmatrix}$ revient à résoudre le système :

$\begin{cases} 6x+8y=33 \\ 5x+7y=-38 \end{cases}$

1.

m) Compléter en expliquant votre démarche :

$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 267,5 \\ 196,5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 33 \\ -38 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3,5 & -4 \\ -2,5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3,5 & -4 \\ -2,5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 33 \\ -38 \end{pmatrix}$ soit

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 267,5 \\ 196,5 \end{pmatrix}$ d'où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 267,5 \\ 196,5 \end{pmatrix}$

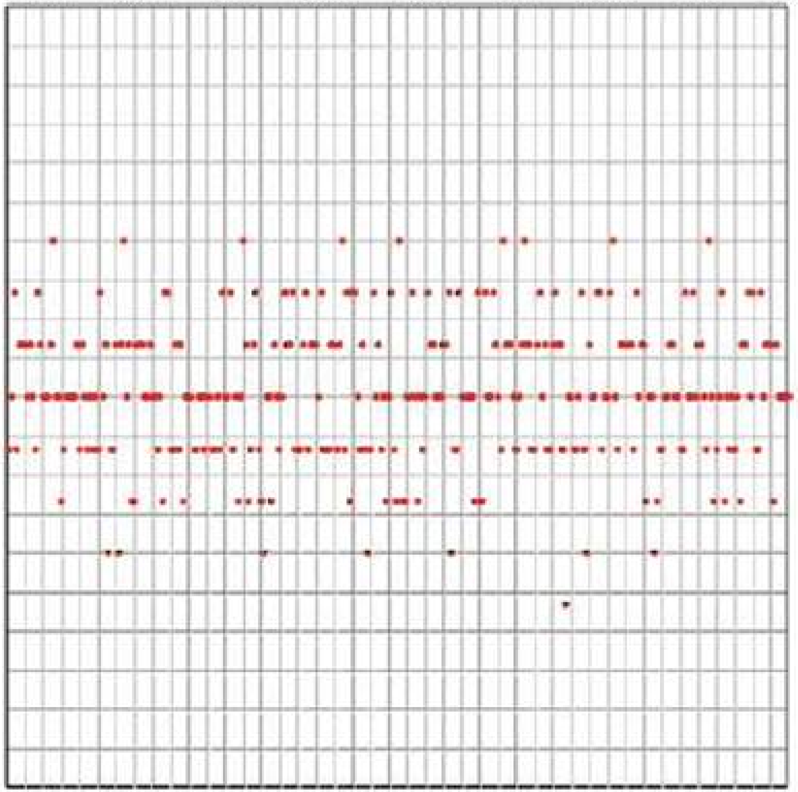
5. Modèle de diffusion d' EHRENFEST

I) Un problème avec un algorithme :

Votre professeur de Mathématiques est en congé de maternité (environ quatre mois). Son remplaçant (peu scrupuleux) va vous noter d'une façon peu recommandable! Il décide de commencer par mettre 20 à tous les élèves de votre classe. Puis, chaque jour, il choisit au hasard un élève de votre classe pour modifier sa note : s'il a 20, il la remplace par 0; et s'il a 0, il la transforme à nouveau en 20. Au bout de 120 jours, ce « professeur » écrit sur le bulletin la dernière note qu'il a attribuée à chaque élève. La moyenne de la classe conviendra-t-elle à votre Proviseur? (Répondre intuitivement, puis faire des simulations)

Voici un algorithme qui met en place 300 simulations pour une classe de 30 élèves. Il calcule donc 300 moyennes (chacune de ces moyennes se faisant normalement après 120 jours). L'algorithme n'utilise pas de liste (ce qui n'est peut-être pas naturel, mais c'est efficace). S représente le nombre de vingt dans la classe.

GRAPHIQUE :

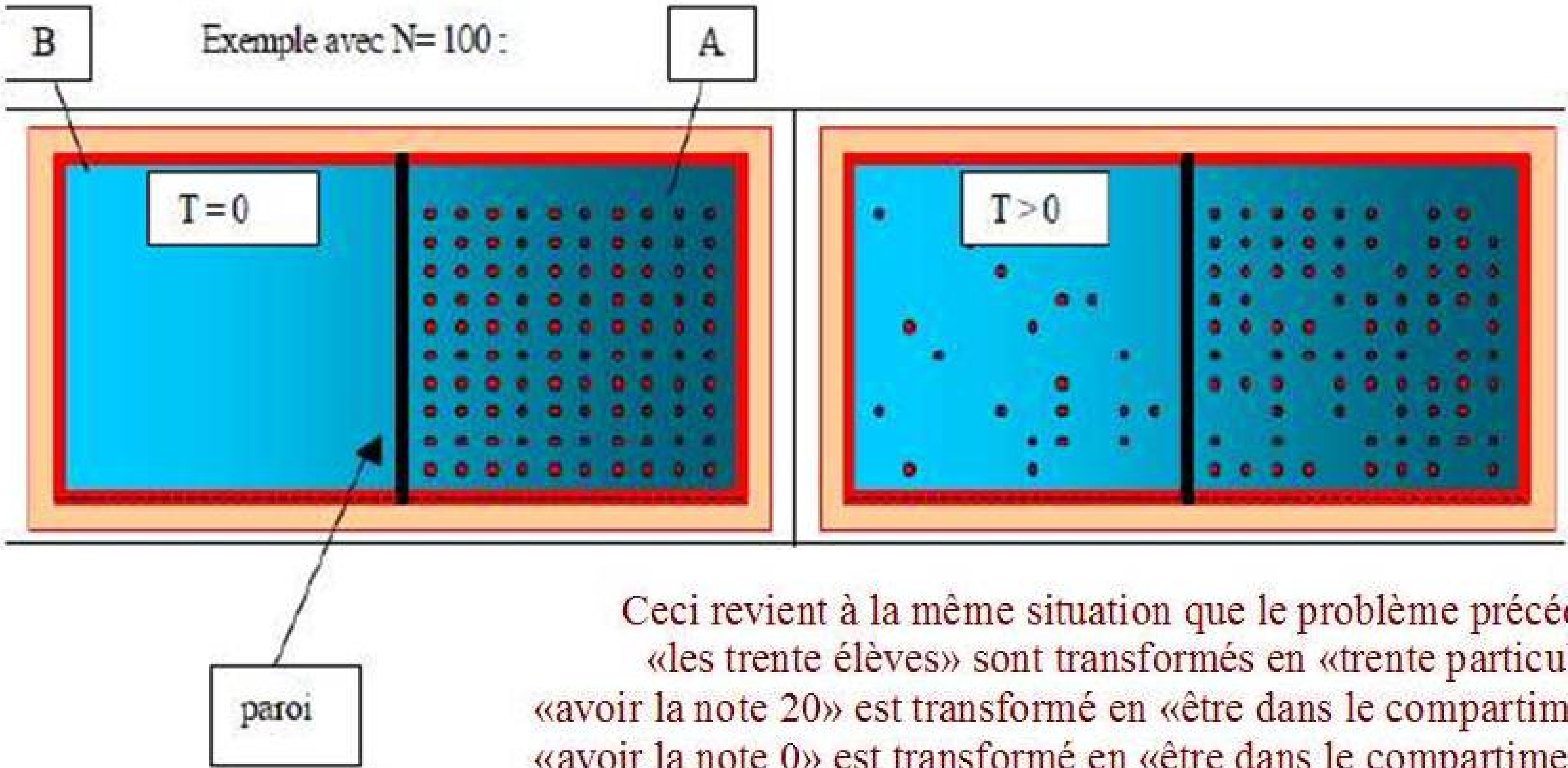


Xmin: 0 ; Xmax: 300 ; Ymin: 0 ; Ymax: 20 ; GradX: 7 ; GradY: 1

A) Le modèle d'Ehrenfest

a) Description du modèle

C'est un modèle de diffusion d'un gaz à travers une paroi proposé par les physiciens Ehrenfest (Mr et Mme) au début du siècle dernier : Une boite séparée en 2 compartiments A et B contient au total N particules. A chaque top d'une horloge, une particule et une seule, *choisie au hasard parmi les N*, change de compartiment. A l'instant initial toutes les particules sont en A.



Ceci revient à la même situation que le problème précédent :
«les trente élèves» sont transformés en «trente particules»
«avoir la note 20» est transformé en «être dans le compartiment droit»
«avoir la note 0» est transformé en «être dans le compartiment gauche»

B) <u>Situation avec N = 2 particules :</u>

a) Déterminer les trois états possibles.
b) Établir le graphe dont les sommets sont ces états.
c) Établir les premières branches de l'arbre de probabilité.
c) Écrire P la matrice de transition. Puis déterminer les puissances de P.
d) Programmer une simulation avec 100 passages.

B) **Situation avec N = 2 particules :**

a) Déterminer les trois états possibles.
b) Établir le graphe dont les sommets sont ces états.
c) Établir les premières branches de l'arbre de probabilité.
c) Écrire P la matrice de transition. Puis déterminer les puissances de P.
d) Programmer une simulation avec 100 passages.

Voir le document «Ressources»

B) Situation avec N = 2 particules :

a) Déterminer les trois états possibles.
b) Établir le graphe dont les sommets sont ces états.
c) Établir les premières branches de l'arbre de probabilité.
c) Écrire P la matrice de transition. Puis déterminer les puissances de P.
d) Programmer une simulation avec 100 passages.

Voir le document «Ressources»

6. Marche aléatoire

I) Une petite marche sur trois pas :

Un individu est à la porte d'un bar... Il a une chance sur deux d'avancer ou de reculer. Ensuite, dès qu'il quitte ou rentre dans le bar d'un pas, il revient à la porte du bar! Et il recommence ainsi de suite à tituber...

a) Établir le graphe dont les sommets sont les trois lieux où peut être cet individu.
b) Établir les premières branches de l'arbre de probabilité.
c) Écrire P la matrice de transition. Puis déterminer les puissances de P.
d) Programmer une simulation avec 100 pas.
e) Faire le lien avec le modèle de diffusion d'Ehrenfest.

B) Situation avec N = 2 particules :

a) Déterminer les trois états possibles.
b) Établir le graphe dont les sommets sont ces états.
c) Établir les premières branches de l'arbre de probabilité.
c) Écrire P la matrice de transition. Puis déterminer les puissances de P.
d) Programmer une simulation avec 100 passages.

Voir le document «Ressources»

6. Marche aléatoire

I) Une petite marche sur trois pas :

Un individu est à la porte d'un bar... Il a une chance sur deux d'avancer ou de reculer. Ensuite, dès qu'il quitte ou rentre dans le bar d'un pas, il revient à la porte du bar! Et il recommence ainsi de suite à tituber...

a) Établir le graphe dont les sommets sont les trois lieux où peut être cet individu.
b) Établir les premières branches de l'arbre de probabilité.
c) Écrire P la matrice de transition. Puis déterminer les puissances de P.
d) Programmer une simulation avec 100 pas.
e) Faire le lien avec le modèle de diffusion d'Ehrenfest.

C'est la même matrice de transition
que le cas N=2 de l'urne d'Ehrenfest
Voir le document «Ressources»