

## II) Enoncé II : 25 ans plus tard...

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires. A l'année zéro, un quart des habitants sont en X. Chaque année, 27% des habitants de Y partent habiter dans la ville X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 13% des habitants de X partent habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.

Déterminer le nombre d'habitants de la ville X à la 25<sup>e</sup> année. (utiliser un logiciel de calcul)

Diagram illustrating the migration between cities X and Y:

- City X: 0,87 (self-loop), 0,27 (to Y)
- City Y: 0,13 (to X), 0,73 (self-loop)

Avec  $x_0 = 250\ 000$  et  $y_0 = 750\ 000$

ou a 
$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,87 x_n + 0,27 y_n \\ y_{n+1} = 0,13 x_n + 0,73 y_n \end{cases}$$
 pour tout  $n \in \mathbb{N}$

d'où 
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,87 & 0,27 \\ 0,13 & 0,73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$
  $n \in \mathbb{N}$ .

Calcul de la population à la 25<sup>e</sup> année:

$$\begin{pmatrix} x_{25} \\ y_{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,87 & 0,27 \\ 0,13 & 0,73 \end{pmatrix}^{25} \begin{pmatrix} 250\ 000 \\ 750\ 000 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 674\ 999 \\ 325\ 001 \end{pmatrix}$$

Calculer avec Xcas, par exemple.

On peut aussi travailler avec un tableur, sans passer par les matrices.

1 [[0.87,0.27],[0.13,0.73]]

$$\begin{bmatrix} 0.87, & 0.27 \\ 0.13, & 0.73 \end{bmatrix}$$

2 [[0.87,0.27],[0.13,0.73]]^25

$$\begin{bmatrix} 0.675000923984, & 0.674998080956 \\ 0.324999076016, & 0.325001919044 \end{bmatrix}$$

3 [[0.675000923984,0.674998080956],[0.324999076016,0.325001919044]]\*[[250000],[750000]]

$$\begin{bmatrix} 674998.791713 \\ 325001.208287 \end{bmatrix}$$

1 [[0.87,0.27],[0.13,0.73]]

$$\begin{bmatrix} 0.87, & 0.27 \\ 0.13, & 0.73 \end{bmatrix}$$

2 [[0.87,0.27],[0.13,0.73]]^25

$$\begin{bmatrix} 0.675000923984, & 0.674998080956 \\ 0.324999076016, & 0.325001919044 \end{bmatrix}$$

3 [[0.675000923984,0.674998080956],[0.324999076016,0.325001919044]]\*[[250000],[750000]]

Au fil du temps, que se passera-t-il?

$$\begin{bmatrix} 674998.791713 \\ 325001.208287 \end{bmatrix}$$

4 [[0.87,0.27],[0.13,0.73]]^35

$$\begin{bmatrix} 0.675000005587, & 0.674999988396 \\ 0.324999994413, & 0.325000011604 \end{bmatrix}$$

5 [[0.87,0.27],[0.13,0.73]]^45

$$\begin{bmatrix} 0.675000000034, & 0.674999999993 \\ 0.324999999966, & 0.325000000007 \end{bmatrix}$$

6 [[0.87,0.27],[0.13,0.73]]^55

$$\begin{bmatrix} 0.675, & 0.675 \\ 0.325, & 0.325 \end{bmatrix}$$

Et si n est encore plus grand, si on fait abstraction des erreurs de calcul dues au logiciel Xcas : le système est stable

7 [[0.87,0.27],[0.13,0.73]]^55\*[[250000],[750000]]

$$\begin{bmatrix} 675000.0 \\ 325000.0 \end{bmatrix}$$

La population se rapprochera au fil du temps de 675 000 individus dans la ville X.