QUELQUES PASSAGES DE LA PREMIERE PARTIE

- Représentation d'un graphe

Mathématiques
Série S

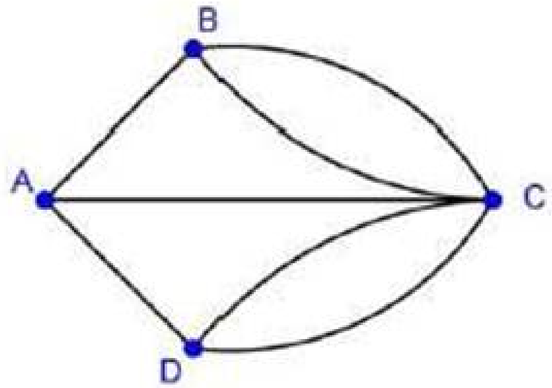
Enseignement de spécialité

D. Représentation d'un graphe. Notion de connexité

1. Parcourir un graphe

Chacun connaît l'histoire du parcours impossible empruntant une et une seule fois les sept ponts de la ville de Koenigsberg (aujourd'hui Kaliningrad), ponts reliant les rives (B et D) du fleuve qui traverse la ville, la Pregel, aux deux îles (A et C) que celle-ci forme, et les deux îles entre elles.

On dit que Léonard Euler (1707 – 1783) résolut le problème et mit en évidence l'absence de solution. L'humanité l'avait résolu en pratique avant lui, mais le génie d'Euler fut de fabriquer des mathématiques avec cette question, c'est-à-dire de donner des définitions donnant naissance à des théorèmes réutilisables dans d'autres situations.



Les ponts de Koenigsberg

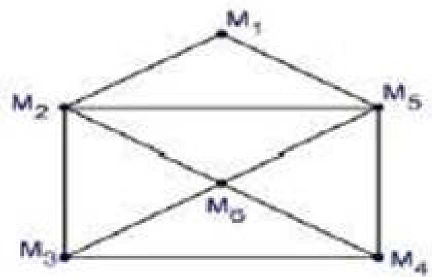
Le problème des ponts de Koenigsberg consiste en fait à savoir si un certain *graphe* est *eulérien* (c'est-à-dire si on peut en parcourir toutes les arêtes sans passer deux fois sur la même).

Voici quelques définitions.

Un graphe (non orienté) à n sommets est une suite finie de points distincts (M_1, M_2, …, M_n), appelés **sommets**, et d'**arêtes**, dont les extrémités sont des sommets. On considérera ici qu'il n'existe pas de **boucle**, c'est-à-dire d'arête ayant pour extrémités le même sommet, et qu'il n'existe pas non plus de point **isolé**, c'est-à-dire relié à aucun autre point.

Une **chaîne** de longueur $p \geq 2$ reliant M_i à M_j est une suite de sommets $\left(S_1, S_2, \ldots, S_p, S_{p+1}\right)$ telle que $S_1 = M_i$, $S_{p+1} = M_j$, et que, pour tout entier k compris entre 1 et p, il existe une arête reliant S_k à S_{k+1}. Dans le graphe associé au problème des Ponts de Koenigsberg, il n'existe pas de chaîne de longueur 1 reliant B à D.

Dans le graphe ci-dessous, (M_5, M_1, M_2) est une chaîne de longueur 2 reliant M_5 à M_2, (M_5, M_4, M_6, M_2) en est une de longueur 3, (M_5, M_6, M_4, M_2) une de longueur 4, etc.



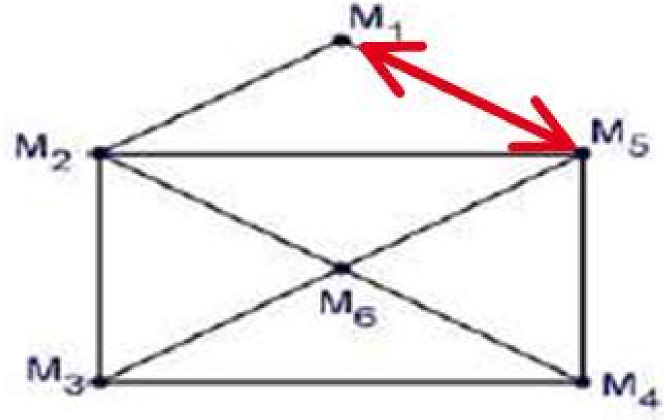
Un graphe en forme d'« enveloppe »

Il n'existe pas de chaîne de longueur 1 reliant M_5 à lui-même, mais il en existe une de longueur 2 : (M_5, M_1, M_5). D'ailleurs, quand le graphe ne contient pas de point isolé (ce qui est notre hypothèse de travail), il existe toujours une chaîne reliant un point à lui-même.

2. Matrice d'adjacence d'un graphe

Un graphe à n sommets est caractérisé par les arêtes qui relient certains sommets entre eux. On peut donc représenter un graphe à n sommets (M_1, M_2, ..., M_n) par un tableau à n lignes et n colonnes dans lequel, à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, on écrit 0 si aucune arête ne relie M_i et M_j, et 1 si une arête les relie. Ainsi pour le graphe précédent (« l'enveloppe »), on obtient le tableau suivant :

	M1	M2	M3	M4	M5	M6
M1	0	1	0	0	1	0
M2	1	0	1	0	1	1
M3	0	1	0	1	0	1
M4	0	0	1	0	1	1
M5	1	1	0	1	0	1
M6	0	1	1	1	1	0



En notant a_{ij} le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, on définit un tableau à 6 lignes et 6 colonnes (matrice de format (6, 6)), appelée matrice d'adjacence du graphe :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

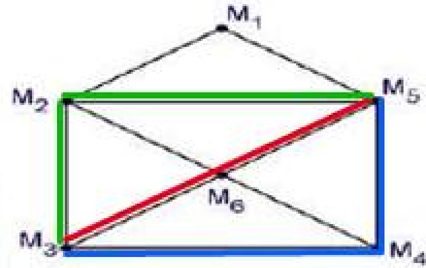
La matrice précédente contient de nombreux zéros, traduisant l'absence d'arêtes reliant certains sommets du graphe. Par exemple, à la lecture de la matrice, on peut dire qu'il n'y a pas d'arête reliant les sommets M_2 et M_4.

Afin d'étudier la connexité d'un graphe, on peut s'intéresser à l'existence de chaines de longueur 2 entre deux sommets.

Soient i *et* j deux entiers compris entre 1 et n (ici $n = 6$). L'existence d'une chaine de longueur 2 entre les sommets M_i et M_j correspond à l'existence d'au moins un indice k tel que $a_{ik} \neq 0$ et $a_{kj} \neq 0$ c'est-à-dire tel que $a_{ik}\, a_{kj} \neq 0$.

On observe alors que le nombre $b_{ij} = \sum_{k=1}^{k=6} a_{ik} a_{kj}$ est la somme de six termes dont chacun est le produit de deux nombres choisis parmi 0 et 1 ; à chacun des termes non nuls de cette somme est associée une chaîne de longueur 2 joignant M_i et M_j et une seule. Leur somme est donc le nombre de chaînes de longueur 2 joignant M_i et M_j.

Les coefficients $b_{i\,j}$ définissent une nouvelle matrice B et les n^2 relations précédentes peuvent se traduire par la relation matricielle suivante :



Numériquement, la relation s'écrit ici :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

On peut ainsi lire dans la matrice de droite qu'il y a 3 chaînes de longueur 2 joignant le sommet M_3 au sommet M_5.

On peut ensuite définir les puissances successives de la matrice d'adjacence A et montrer par récurrence que, pour tout entier $p > 1$, les coefficients de la matrice A^p donnent les nombres de chaînes de longueur p allant d'un sommet du graphe à un autre.

3. Lire la connexité d'un graphe sur sa matrice d'adjacence

Le calcul numérique précédent a pour résultat une matrice B dont aucun coefficient n'est nul, ce qui signifie que chaque fois qu'on se donne deux sommets, il existe une chaîne de longueur 2 qui les relie. On peut donc conclure que le graphe de l'« enveloppe » est connexe.

Cela pouvait, bien sûr, se voir mais il faut imaginer des graphes possédant un grand nombre de sommets où « voir » n'est plus aussi évident.

Ce qui précède montre surtout qu'**un graphe peut être donné par sa matrice**.

En consultant les puissances successives de la matrice d'adjacence, on peut savoir s'il y a des chaînes de longueur 2, 3, … reliant tel sommet à tel autre. Mais jusqu'où calculer pour établir la connexité d'un graphe dans un cas quelconque ?

Considérons un graphe à n sommets ($n \geq 2$). Si une chaîne de longueur n ne passe pas par tous les sommets du graphe, alors elle passe au moins deux fois par le même sommet et on peut réduire la « boucle » qu'elle formait. Cet argument montre que pour étudier la connexité, il suffit de pousser la recherche jusqu'à la puissance n-ième. D'où le résultat suivant :

un graphe associé à une matrice d'adjacence A de format (n, n) (on dit aussi matrice carrée d'ordre n) est connexe si et seulement si, pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et n, il existe un entier p compris entre 1 et n tel que le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A^p soit non nul.