Le modèle de T. & P. EHRENFEST, et le cas N > 2

Modèle des urnes d'Ehrenfest

Le **modèle des urnes** est un modèle stochastique introduit en 1907 par les époux Ehrenfest pour illustrer certains des « paradoxes » apparus dans les fondements de la mécanique statistique naissante[1]. Peu de temps en effet après que Boltzmann eut publié son théorème H, des critiques virulentes furent formulées, notamment par Loschmidt, puis par Zermelo, Boltzmann étant accusé de pratiquer des « mathématiques douteuses ».

Ce modèle est parfois également appelé le « *modèle des chiens et des puces*[2] ». Le mathématicien Mark Kac a écrit à son propos qu'il était :

> « *... probablement l'un des modèles les plus instructifs de toute la physique ...* »

Tatiana and Paul Ehrenfest's work on the foundations of statistical mechanics and statistical thermodynamics was important to the development of those fields.

e général et technologique

Ressources pour la classe terminale
générale et technologique

Mathématiques
Série S

QUELQUES PASSAGES
DE LA TROISIEME PARTIE

Le modèle de T. & P. EHRENFEST, et le cas N > 2

Enseignement de spécialité

4. Retour sur le modèle d'urnes de T. & P. Ehrenfest

Etude du cas N > 2

Certains résultats, trop complexes à prouver dans le cadre de cet enseignement de spécialité, sont énoncés. Ils sont destinés à sensibiliser les élèves aux résultats que l'on peut obtenir grâce à la puissance du calcul matriciel.

a) Le cadre général

On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre initial de boules dans l'urne B.

À chaque instant n $\geq$ 1, on tire au hasard, de façon équiprobable, un numéro entre 1 et N et on change d'urne la boule correspondante.

Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne B à l'instant n > 0.

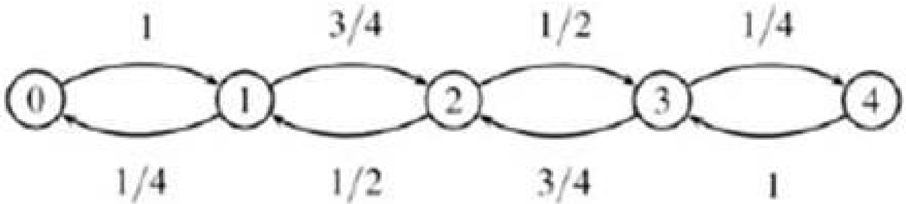
Ces variables aléatoires sont définies sur = $[\![0, N]\!]$.

On a pour tout couple (i, j) de $[\![0, N]\!]^2$, $p_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)=\begin{cases}\frac{i}{N} \text{ si } j=i-1\\ \frac{N-i}{N} \text{ si } j=i+1\\ 0 \text{si} |i-j| \neq 1\end{cases}$.

b) Exemple pour 4 boules

$$E = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphe de transition :



$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

On suppose dans cet exemple qu'à l'état initial, toutes les boules sont dans l'urne A. On a donc $V_0 = (1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$.

On obtient aisément $V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On obtient, à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

$$P^n = \begin{pmatrix}
(1+(-1)^n)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) & (1-(-1)^n)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}\right) & (1+(-1)^n)\times\frac{3}{8} & (1-(-1)^n)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\right) & (1+(-1)^n)\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{2^{n+2}}\right) \\
(1-(-1)^n)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+3}}\right) & (1+(-1)^n)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) & (1-(-1)^n)\times\frac{3}{8} & (1+(-1)^n)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+2}}\right) & (1+(-1)^n)\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{2^{n+3}}\right) \\
(1+(-1)^n)\times\frac{1}{16} & (1-(-1)^n)\times\frac{1}{4} & (1+(-1)^n)\times\frac{3}{8} & (1-(-1)^n)\times\frac{1}{4} & (1+(-1)^n)\times\frac{1}{16} \\
(1+(-1)^n)\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{2^{n+3}}\right) & (1+(-1)^n)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+2}}\right) & (1-(-1)^n)\times\frac{3}{8} & (1+(-1)^n)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) & (1-(-1)^n)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+3}}\right) \\
(1+(-1)^n)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) & (1-(-1)^n)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\right) & (1+(-1)^n)\times\frac{3}{8} & (1-(-1)^n)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}\right) & (1+(-1)^n)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+2}}\right)
\end{pmatrix}$$

Avec $V_0 = (1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$, on obtient :

$$V_n = \begin{pmatrix} (1+(-1)^n)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) & (1-(-1)^n)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}\right) & (1+(-1)^n)\times\frac{3}{8} & (1-(-1)^n)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\right) & (1+(-1)^n)\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{2^{n+2}}\right) \end{pmatrix}$$

Le nombre moyen de boules dans l'urne B au bout de n étapes est $\mathrm{E}(X_n) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. Avec le temps, on aura en moyenne 2 boules dans chacune des urnes.

c) Nombre moyen de boules dans l'urne B dans le cas général

On démontre, en utilisant des espérances conditionnelles, que $\mathrm{E}(X_n)=\frac{N}{2}+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n\left(E(X_0)-\frac{N}{2}\right)$ (D.FOATA et A.FUCHS- Processus stochastiques, DUNOD)

Dans le cas où N est supérieur à 2, $\mathrm{E}(X_n)$ tend vers $\frac{N}{2}$. Cela signifie qu'avec le temps, il y aura à peu près autant de boules dans les deux compartiments.

d) Temps de retour à un état initial k

On peut également démontrer que le temps de retour moyen à l'état k (c'est à dire, partant de l'état de k boules dans l'urne B, on retourne pour la première fois à k boules dans l'urne B) est :

$$m_k = \frac{2^N}{\binom{N}{k}}.$$

Le temps moyen de retour à l'état où l'urne B est vide est donc égal à 2^N.

L'étude des chaines de Markov permet de prouver que l'urne retrouvera son état initial de façon quasi-certaine (résultat de Pierre BREMAUD en 1988 par application du critère de Foster à la matrice de transition). Cependant, si N est un multiple du nombre d'Avogadro, égal à $6{,}02.10^{23}$, et que chaque transition se fait en une seconde, ce temps moyen est astronomique et quasiment infini à notre échelle. On n'observe donc pas de retour à l'état initial et cette « irréversibilité » est en grande partie due à la différence entre l'échelle de temps de l'observateur et celle du temps de retour.

Ressource : *SIMULATION DE L'URNE D'EHRENFEST* Son apport à l'appropriation des concepts d'équilibre statistique, d'irréversibilité, d'entropie, de flèche du temps Alain Marie-Jeanne 1, Frédéric Beau 1, Michel Janvier 1 (2003) disponible sur http://hal.inria.fr.

d) Temps de retour à un état initial k

On peut également démontrer que le temps de retour moyen à l'état k (c'est à dire, partant de l'état de k boules dans l'urne B, on retourne pour la première fois à k boules dans l'urne B) est :

$$m_k = \frac{2^N}{\binom{N}{k}}.$$

Le temps moyen de retour à l'état où l'urne B est vide est donc égal à 2^N.

L'étude des chaines de Markov permet de prouver que l'urne retrouvera son état initial de façon quasi-certaine (résultat de Pierre BREMAUD en 1988 par application du critère de Foster à la matrice de transition). Cependant, si N est un multiple du nombre d'Avogadro, égal à $6{,}02.10^{23}$, et que chaque transition se fait en une seconde, ce temps moyen est astronomique et quasiment infini à notre échelle. On n'observe donc pas de retour à l'état initial et cette « irréversibilité » est en grande partie due à la différence entre l'échelle de temps de l'observateur et celle du temps de retour.

le fait que ces « particules » (molécules ou atomes), dans un état gazeux dit parfait, occupent toutes le même volume moyen : soit 22,414 L sous une pression de $1{,}01325 \times 10^5$ Pa et une température de 273,15 K, pour le nombre de particules égal au nombre d'Avogadro

WIKIPÉDIA
L'encyclopédie libre