Idée : introduire le théorème de Bézout en cherchant les points à coordonnées entières d'une droite $\boxed{\textbf{(d)}: \boldsymbol{ax + by = k}}$
S'appuyer sur deux exemples (partie 1) pour faire comprendre le cas général.

Prérequis : connaître les premières propriétés de $\mathbb{N}$, la division euclidienne, la notion de PGCD, les entiers premiers entre eux.

Devoir sur feuille (*spécialité*)

**Exercice**

***a* et *b* étant deux nombres entiers relatifs donnés, on s'intéresse à l'existence éventuelle de points à coordonnées entières appartenant à la droite (d) d'équation :** $\boxed{\textbf{(d)}: \boldsymbol{ax + by = k.}}$

Soient $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls. On définit l'ensemble $(E_{a;b})$ par : $E_{a;b} = \{ax + by \text{ , } x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$.

**Partie 1**. *Étude de deux cas particuliers* :

1. On pose $a = 14$ et $b = 9$. On étudie $E_{14;9} = \{14x + 9y \text{ , } x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$
   a) Au tableur, construire les éléments de $E_{14;9}$ pour $x$ et $y$ compris entre – 15 et 15.
   Fournir la copie imprimée d'une partie du tableau.
   b) Pour quelles valeurs de $x$ et $y$ obtient-on 0 ? Obtient-on 1 ? Obtient-on 2 ?
   Obtient-on plusieurs fois ces valeurs ?
   c) Soit $n$ un entier relatif quelconque. Montrer que $n \in E_{14;9}$. Quel est l'ensemble $E_{14;9}$ ?
   d) Donner les coordonnées entières de 5 points de la droite d'équation $14x + 9y = 5$.

2. On pose $a = 18$ et $b = 42$. On étudie donc $E_{18;42} = \{18x + 42y \text{ , } x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$.
   a) Au tableur, construire les éléments de $E_{18;42}$ pour $x$ et $y$ $x$ et $y$ compris entre – 15 et 15.
   Fournir la copie imprimée d'une partie du tableau.
   b) Quelle est la plus petite valeur $d$ strictement positive contenue dans le tableau ?
   Pour quelles valeurs de $x$ et $y$ obtient-on cette valeur $d$ ? Ces valeurs de $x$ et $y$ sont-elles uniques ?
   c) Soit $k$ un élément quelconque de $E_{18;42}$. Montrer que $d$ divise $k$.
   Soit $n$ un entier relatif quelconque. Montrer que : $dn \in E_{18;42}$
   Quel est l'ensemble $E_{18;42}$ ?
   e) Combien de points de coordonnées entières compte la droite d'équation $18x + 42y = 14$ ?
   Donner les coordonnées entières de 5 points de la droite d'équation $18x + 42y = 30$.

**Partie 2**. *Étude du cas général : a et b sont deux entiers naturels non nuls quelconques.*

On note $(E_{a;b})^{+*}$ l'ensemble $E_{a;b} \cap \mathbb{N}^*$.

1. a) En utilisant l'affirmation : $(m \in E_{a;b}) \Leftrightarrow (\exists\, x \in \mathbb{Z}, \exists\, y \in \mathbb{Z}$ tels que : $m = ax + by)$,
   montrer que si $m$ et $n$ sont deux éléments de $E_{a;b}$ alors $m + n$, $m - n$ et d'une manière générale $\alpha m + \beta n$ (avec $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in \mathbb{Z}$) sont des éléments de $E_{a;b}$.
   b) Pourquoi peut-on affirmer que $(E_{a;b})^{+*} \neq \varnothing$ ?
   En déduire que $(E_{a;b})^{+*}$ admet un plus petit élément $d$ ($d \in \mathbb{N}^*$).
   Montrer que tout multiple de $d$ appartient à $E_{a;b}$.
   Montrer que $d$ divise $a$ (on pourra écrire la division euclidienne de $a$ par $d$) et $d$ divise $b$.
   c) Montrer que : si $k \in E_{a;b}$, alors $k$ est un multiple de $d$ (on pourra écrire la division euclidienne de $k$ par $d$).
   d) Montrer que $d$ est le plus grand diviseur commun de $a$ et $b$. Quel est l'ensemble $(E_{a;b})$ ?

2. *Applications* :

a) Répondre à la question initiale : à quelle condition la droite d'équation $ax + by = c$ admet-elle des points à coordonnées entières ?
Soient $a = 2156$ et $b = 8228$. Déterminer la décomposition en facteurs premiers de $a$ et $b$.
En déduire le plus grand diviseur commun $d$ de 2156 et 8228.
La droite d'équation : $2156x + 8228y = 22$ a-t-elle des points à coordonnées entières ? (si oui, en donner trois)
La droite d'équation : $2\,156x + 8\,228y = 132$ a-t-elle des points à coordonnées entières ? (si oui, en donner trois).

b) A quelle condition (sur $a$ et $b$) peut-on trouver deux entiers $u$ et $v$ tels que $au + bv = 1$ ?
Enoncer la réciproque. Cette réciproque est-elle vraie ?

Correction

**Partie 1**

1b. $0 = 14 \times 9 + 9 \times (-14)$ donc $x = 9$ et $y = -14$ permettent d'obtenir 0.
$1 = 14 \times 2 + 9 \times (-3)$ donc $x = 2$ et $y = -3$ permettent d'obtenir 1.
$2 = 14 \times 4 + 9 \times (-6)$ donc $x = 4$ et $y = -6$ permettent d'obtenir 2. (*il suffit de multiplier par 2 la ligne précédente !*)
Oui, on obtient aussi : $1 = 14 \times (-7) + 9 \times 11$ donc $x = -7$ et $y = 11$ permettent aussi d'obtenir 1 (*on obtient donc 2 avec $x = -14$ et $y = 22$*).

1c. En multipliant par $n$ ($n \in \mathbb{Z}$) l'égalité : $1 = 14 \times 2 + 9 \times (-3)$ on obtient :
$n = 14 \times 2n + 9 \times (-3n)$ donc $x = 2n$ et $y = -3n$ permettent d'obtenir $n$ quel que soit $n \in \mathbb{Z}$.
Ainsi $E_{14;9}$ contient $\mathbb{Z}$ et comme : $E_{14;9} \subset \mathbb{Z}$ (*car $E_{14;9}$ ne peut contenir que des nombres entiers*) on en déduit : $E_{14;9} = \mathbb{Z}$.

2b. Le plus petit entier strictement positif du tableau est $d = 6 = 18 \times (-2) + 42 \times 1$ (*donc $x = -2$ et $y = 1$*).
On a aussi : $6 = 18 \times (-9) + 42 \times 4$ (*donc $x = -9$ et $y = 4$*), donc les valeurs de $x$ et $y$ pour avoir 6 ne sont pas uniques.

2c. Soit $k \in E_{18;42}$. Il existe donc deux entiers $x$ et $y$ tels que : $k = 18x + 42y = 6(3x + 7y)$.
Comme $x$ et $y$ sont des entiers, $3x + 7y$ est un entier, donc 6 divise $k$.

2d. Comme $6n = [18 \times (-2) + 42 \times 1] \times n = 18 \times (-2n) + 42 \times n$, $6n \in E_{18;42}$.
On en déduit : $E_{18;42}$ est l'ensemble des multiples de $d = 6$.

2e. Comme 14 n'est pas un multiple de 6, la droite d'équation $18x + 42y = 14$ ne passe par aucun point à coordonnées entières.
Comme 30 est un multiple de 6, la droite d'équation $18x + 42y = 30$ passe par une infinité de points à coordonnées entières.
De $6 = 18 \times (-2) + 42 \times 1$ on déduit $5 \times 6 = 18 \times 5 \times (-2) + 42 \times 5$ d'où le point $(-10 ; 5)$. Autres points...

**Partie 2**

1a. Si $m$ et $n$ sont des éléments de $(E_{a;b})$ alors il existe 2 entiers relatifs $x$ et $y$ tels que $m = ax + by$ et 2 entiers relatifs $x'$ et $y'$ tels que $n = ax' + by'$, donc : $m + n = a(x + x') + b(y + y')$, $m - n = a(x - x') + b(y - y')$ et d'une manière générale : $\alpha m + \beta n = a(\alpha x + \beta x') + b(\alpha y + \beta y')$ avec : $\alpha x + \beta x' \in \mathbb{Z}$ et $\alpha y + \beta y' \in \mathbb{Z}$, donc $m + n$, $m - n$ et $\alpha m + \beta n$ sont des éléments de $(E_{a;b})$.

1b. $(E_{a;b})^{+*} \neq \varnothing$ car $a \in (E_{a;b})^{+*}$ ($a > 0$ et $a = 1 \times a + 0 \times b$).
Comme $(E_{a;b})^{+*}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, $(E_{a;b})^{+*}$ admet un plus petit élément $d$.

Comme $d \in (E_{a;b})$, il existe deux entiers $u$ et $v$ tels que $\boxed{d = au + bv}$.

On en déduit qu'un multiple de $d$, soit $kd$, peut s'écrire : $kd = k(au + bv) = aku + bkv$. Donc : $kd \in E_{a;b}$.

Écrivons la division euclidienne de $a$ par $d$ : $a = dq + r$ avec $0 \leq r < d$. On en déduit que $r = a - dq$.
Comme $a$ et $d$ appartiennent à $E_{a;b}$, $r$ appartient à $E_{a;b}$ (*voir 1a*) et $r < d$.
Or $d$ est le plus petit élément strictement positif de $(E_{a;b})$. Donc $r = 0$.
On a donc : $a = dq$, soit $\boxed{d \mid a}$. On démontre de même que $\boxed{d \mid b}$. $\boxed{d \text{ est donc un } \textbf{diviseur commun} \text{ de } a \text{ et } b}$.

1c. Soit : $k \in (E_{a;b})$. Effectuons la division euclidienne de $k$ par $d$, soit : $k = dq + r$ avec $0 \leq r < d$ (donc $r = k - dq$).
Comme $k$ et $d$ appartiennent à $(E_{a;b})$, on en déduit que : $k - dq \in E_{a;b}$. Donc : $r \in E_{a;b}$, donc $r = 0$ puisque $0 \leq r < d$ et que $d$ est le plus petit élément de $(E_{a;b})^{+*}$. On a donc $k = dq$ donc $\boxed{\textbf{tout élément de } (E_{a;b}) \textbf{ est un multiple de } d}$

1d. Soit $\delta$ un diviseur commun à $a$ et $b$ ($\delta > 0$). Il existe deux entiers $k$ et $k'$ tels que : $a = k.\delta$ et $b = k'.\delta$.
Comme $d \in (E_{a;b})$, il existe $u$, $v$ tels que : $d = au + bv$. On en déduit que, en remplaçant $a$ par $k.\delta$ et $b$ par $k'.\delta$ :
$d = k.\delta u + k'.\delta v = \delta(ku + k'v)$ donc $\delta$ divise $d$, donc $\delta \leq d$.
Ainsi tout diviseur commun à $a$ et $b$ est inférieur ou égal à $d$.
Or $d$ est un diviseur commun à $a$ et $b$. **C'est donc le plus grand**.

$\boxed{\textbf{(}E_{a;b}\textbf{) est donc l'ensemble des multiples de } d, d \textbf{ étant le PGCD de } a \textbf{ et } b.}$